

دراسة الدوال

A- الأنشطة

تمرين 1

- 1- حدد رتبة الدالة f و مطايرفها النسبية أو المطلقة إن وجدت في الحالات التالية .
- أ- $f(x) = x(x-3)^2$ ب- $f(x) = x - \arctan x$ ج- $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$
- 2- حدد عدد جذور المعادلة $x^3 + 2x^2 - 7x + 1 = 0$

تمرين 2

- أدرس تقعر C_f منحنى الدالة و حدد نقط انعطافه في الحالتين التاليتين (إن كان ممكنا) .
- أ- $f(x) = x^4 - 2x^3 - 13x$
- ب- $f(x) = x|x|$ (لاحظ أن f غير قابلة للاشتقاق مرتين في 0 و مع ذلك تقبل نقطة انعطاف في $(0; 0)$)
- ج- $f(x) = \cos x - \sin x$

تمرين 3

- حدد المقاربات إن وجدت - أعط الاتجاهات المقاربة في الحالات التالية
- أ- $f(x) = \frac{x^2 + 1}{-2x^2 + x + 3}$ ب- $f(x) = \sqrt[3]{x + 1}$ ج- $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{x - 1}$
- د- $f(x) = x + \sqrt{x}$ ر- $f(x) = x + \sin 2\pi x$

تمرين 4

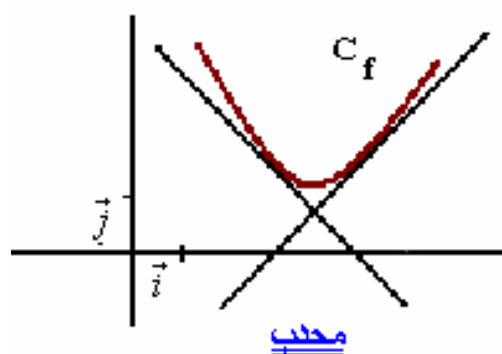
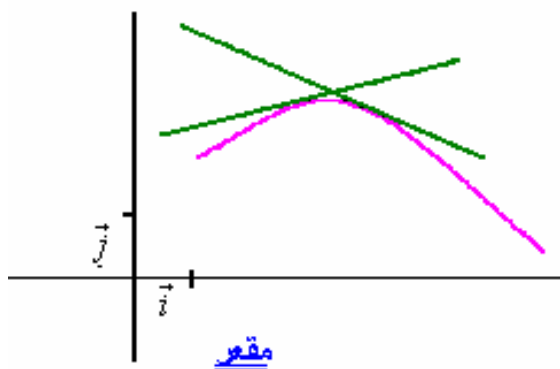
- 1- نعتبر $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 3$ بين ان $A(1; 2)$ مركز تماثل للمنحنى C_f
- 2- نعتبر $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ بين ان المستقيم الذي معادلته $x = \frac{5}{2}$ محور تماثل للمنحنى C_f

B- تذكير مع بعض الاضافات

1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

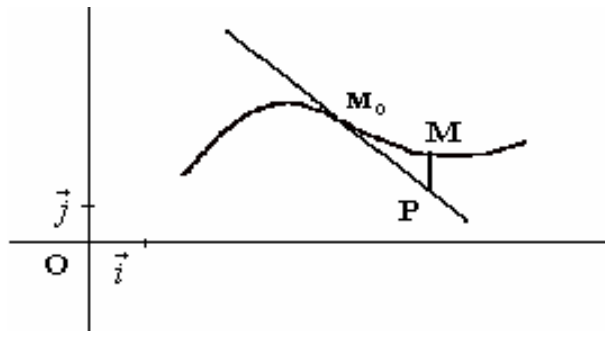
1-1 تعريف

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I
 نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماساته
 نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماساته



2-1 تعريف

لتكن f قابلة للاشتقاق على مجال I و (T) مماسا للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0; f(x_0))$.
 لتكن M و P نقطتين لهما نفس الافصول وينتميان على التوالي إلى (C_f) و (T) إذا انعدم \overline{PM} في x_0 و
 تغيرت إشارته في مجال مفتوح مركزه x_0 فان النقطة M_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



3-1 خصائص

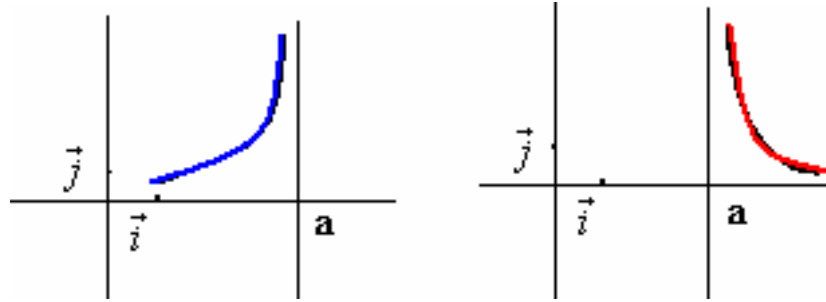
- * دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I
- * إذا كانت f موجبة على I فان (C_f) يكون محدبا على I
- * إذا كانت f سالبة على I فان (C_f) يكون مقعرا على I
- * إذا كانت f تنعدم في x_0 من المجال I وكان يوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة f على $[x_0, x_0 + \alpha[$ مخالفة لإشارة f على $]x_0 - \alpha, x_0]$ فان نقطة انعطاف للمنحنى (C_f) $M_0(x_0; f(x_0))$

ملاحظة - الفروع اللانهائية
 1-2 تعريف قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

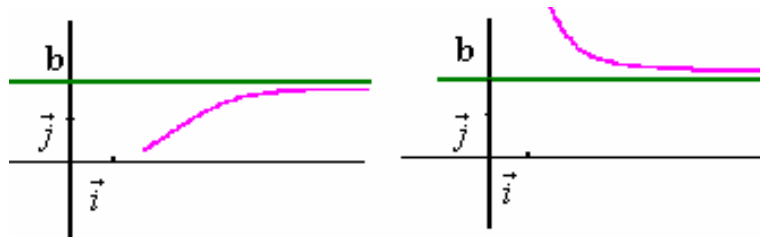
إذا آلت إحدى إحداثيتي نقطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

- * إذا كان $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x = a$ مقارب ل C_f



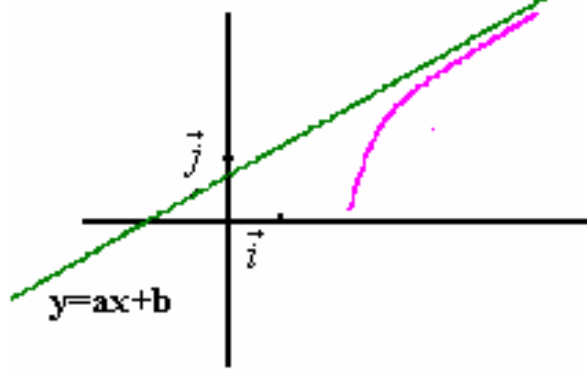
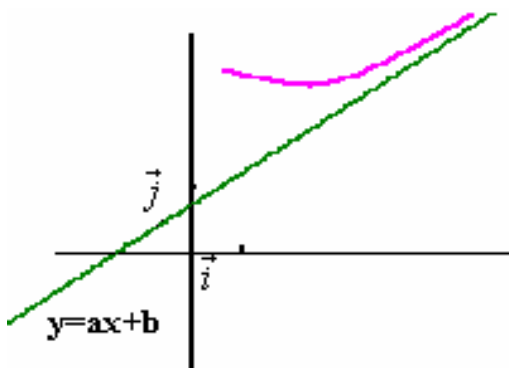
- * إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ فان المستقيم ذا المعادلة $y = b$ مقارب ل C_f .



- ** يكون المستقيم الذي معادلته $y = ax + b$ مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

خاصة

- يكون المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \right)$ أو $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \right)$



ملاحظة دراسة إشارة (f(x) - (ax + b)) تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

2-3- الاتجاهات المقاربة

تعريف

- أ - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأرتاب كاتجاه مقارب.
- ب - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصل كاتجاه مقارب.
- ج - إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ و $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y = ax كاتجاه مقارب

بصفة عامة

إذا كان $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y = ax كاتجاه مقارب.

3- مركز تماثل - محور تماثل

3-1 خاصة

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا فقط إذا كان $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = f(x)$

3-2 خاصة

في معلم ما, تكون النقطة E (a ; b) مركز تماثل لدالة f إذا فقط إذا كان $\forall x \in D_f \quad f(2a - x) = 2b - f(x)$

4- الدالة الدورية

1-4 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعاً بحيث $\forall x \in D_f \quad x + T \in D_f ; \quad x - T \in D_f \quad f(x + T) = f(x)$
العدد T يسمى دور الدالة f. اصغر دور موجب قطعاً يسمى دور الدالة f

4-2 خاصة

إذا كانت للدالة f دور T فإن $\forall x \in D_f, \forall n \in \mathbb{Z} \quad f(x + nT) = f(x)$

4-3 خاصة

إذا كانت f دالة دورية و T دوراً لها فإن منحنى الدالة f على $D_f \cap [x_0 + nT; x_0 + (n+1)T[$ هو صورة منحنى الدالة على $D_f \cap [x_0; x_0 + T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT \cdot \vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسبي.