## .01 ........................................ ( 3 نقط )

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ ، نعتبر النقط $A(1,-1,-1)$ و $B(0,-2,1)$ و $C(1,-2,0)$ .

### .01 ..

أ- نبين أن : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ . ........................................ ( 0.75 ن )

لدينا : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-1\\-2+1\\1+1\end{pmatrix}$ و $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1-1\\-2+1\\0+1\end{pmatrix}$ .

و منه : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}-1&-1\\2&1\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}-1&0\\2&1\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}-1&0\\-1&-1\end{vmatrix}\vec{k}=(-1+2)\vec{i}-(-1+0)\vec{j}+(1+0)\vec{k}$

خلاصة: $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

ب- نستنتج أن : $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ . ........................................ ( 0.5 ن )

طريقة 1 :

✓ لدينا : المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ أي المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,1,1)$ منظمية على المستوى $(ABC)$

✓ ومنه : $M(x,y,z)\in(ABC)\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x-1\\y+1\\z+1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 1\times(x-1)+1\times(y+1)+1\times(z+1)=0$$

$$\Leftrightarrow x-1+y+1+z+1=0$$

$$\Leftrightarrow x+y+z+1=0$$

خلاصة : $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ .

طريقة 2 :

- المتجهة $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1,1,1)$ متجهة منظمية على $(ABC)$ إذن معادلة ديكارتية له هي على شكل $x+y+z+d=0$ .
- النقطة $A(1,-1,-1)$ تنتمي إلى المستوى $(ABC)$ فإن : $1\times1+1\times(-1)+1\times(-1)+d=0$ و منه : $d=1$ .

خلاصة: $x+y+z+1=0$ هي معادلة ديكارتية للمستوى $(ABC)$ .

### .02

لتكن $(S)$ الفلكة التي معادلتها : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0$ . نتحقق من أن مركز الفلكة $(S)$ هو $\Omega(2,-1,1)$ و شعاعها هو $R=\sqrt{5}$ . ........................................ ( 0.75 ن )

لدينا : $x^2+y^2+z^2-4x+2y-2z+1=0\Leftrightarrow\underbrace{x^2-4x+4}_{(x-2)^2}-4+\underbrace{y^2+2y+1}_{(y+1)^2}-1+\underbrace{z^2-2z+1}_{(z-1)^2}-1+1=0$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z-1)^2-1+1=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)^2+(y+1)^2+(z-1)^2=5=\sqrt{5}^2$$

و هي تمثل معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(2,-1,1)$ و شعاعها $R=\sqrt{5}$ .

خلاصة : مركز الفلكة $(S)$ هي النقطة $\Omega(2,-1,1)$ و أن شعاعها $R=\sqrt{5}$ .

**.03** ..

أ- نحسب : $d(\Omega,(ABC))$ ............................................................ ( 0.5 ن )

لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\dfrac{|2-1+1+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$

خلاصة : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}$ .

ب- نستنتج أن المستوى $(ABC)$ يقطع الفلكة وفق دائرة $(\Gamma)$ . ............................................ ( 0.5 ن )

بما أن : $\sqrt{5}$ هو شعاع الدائرة و لدينا : $d(\Omega,(ABC))=\sqrt{3}<\sqrt{5}$

خلاصة : المستوى $(ABC)$ يقطع الفلكة وفق دائرة $(\Gamma)$ .

## .02 ........................................................................................ ( 3 نقط )

**.01** نحل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-2z+4=0$ . ........................................ ( 0.75 ن )

✓ نحسب المميز $\Delta$ : لدينا : $\Delta=(-2)^2-4\times1\times4=4-16=-12<0$

إذن المعادلة لها حلين عقديين مترافقين هما : $z_1=\dfrac{2+i\sqrt{-\Delta}}{2\times1}=\dfrac{2+i\sqrt{12}}{2}=\dfrac{2+i2\sqrt{3}}{2}=1+i\sqrt{3}$ و $z_2=\overline{z_1}=1-i\sqrt{3}$ .

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S=\left\{1+i\sqrt{3}\ ;\ 1-i\sqrt{3}\right\}$

**.02** في المستوى العقدي $(P)$ المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$ نعتبر النقط $A,B,C$ و $D$ التي ألحاقها على التوالي هي : $a=1-i\sqrt{3}$ , $b=2+2i$ , $c=\sqrt{3}+i$ و $d=-2+2\sqrt{3}$ .

أ- نتحقق أن : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$ . ................................................ ( 0.5 ن )

لدينا : $c-d=\sqrt{3}+i-\left(-2+2\sqrt{3}\right)=-\sqrt{3}+2+i$

و $a-d=1-i\sqrt{3}-\left(-2+2\sqrt{3}\right)=3-2\sqrt{3}-i\sqrt{3}=-\sqrt{3}\left(\underbrace{-\sqrt{3}+2+i}_{c-d}\right)=-\sqrt{3}(c-d)$ .

خلاصة : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)$

ب- نستنتج أن النقط $A,C$ و $D$ مستقيمية . ................................................ ( 0.25 ن )

لدينا : $a-d=-\sqrt{3}(c-d)\Leftrightarrow z_{\overrightarrow{DA}}=-\sqrt{3}z_{\overrightarrow{DC}}$ ( مع $z_{\overrightarrow{DA}}$ و $z_{\overrightarrow{DC}}$ لحقي كل من المتجهتين $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ على التوالي )

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA}=-\sqrt{3}\overrightarrow{DC}$

و بالتالي المتجهتين $\overrightarrow{DA}$ و $\overrightarrow{DC}$ مستقيميتين .

خلاصة : النقط $A,C$ و $D$ مستقيمية .

**.03** ليكن $z$ لحق نقطة $M$ و $z'$ لحق النقطة $M'$ صورة $M$ بالدوران $R$ الذي مركزه $O$ و زاويته $\dfrac{-\pi}{3}$ .

نتحقق أن : $z'=\frac{1}{2}az$ . ...................................................... ( 0.5 ن )

الكتابة العقدية للدوران R هي : $z'-\omega=(z-\omega)e^{i\theta}$ مع $\omega$ هو لحق مركز الدوران و $\theta$ هو زاوية الدوران .

ومنه : $z'-0=(z-0)e^{i\frac{-\pi}{3}}$ ؛ ( لأن $\omega=0$ هو لحق O مركز الدوران R و $\theta=\frac{-\pi}{3}$ زاوية الدوران )

$$\begin{aligned} z' &= z\times\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\\ &= z\times\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\ &= z\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= z\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)\\ &= \frac{1}{2}az \qquad ;\ \left(1-i\sqrt{3}=a\right)\end{aligned}$$

و بالتالي الكتابة العقدية للدوران R هي $z'=\frac{1}{2}az$ .

خلاصة : $z'=\frac{1}{2}az$

**.04** لتكن H صورة النقطة B بالدوران R ؛ و h لحقها ؛ و P النقطة التي لحقها p حيث $p=a-c$ .

أ- تحقق أن : $h=ip$ . ...................................................... ( 0.5 ن )

لدينا :

$$\begin{aligned} R(B)=H &\Leftrightarrow h=\frac{1}{2}ab\\ &\Leftrightarrow h=\frac{1}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)(2+2i)\\ &\Leftrightarrow h=\left(1-i\sqrt{3}\right)(1+i)\\ &\Leftrightarrow h=\left(1-i\sqrt{3}\right)+i\left(1-i\sqrt{3}\right)\\ &\Leftrightarrow h=i\underbrace{\left(-i-\sqrt{3}\right)}_{-c}+i\underbrace{\left(1-i\sqrt{3}\right)}_{a}\\ &\Leftrightarrow h=i(a-c)\\ &\Leftrightarrow h=ip\end{aligned}$$

خلاصة : $h=ip$

ب- نبين أن : المثلث OHP قائم الزاوية و متساوي الساقين في O . ...................................................... ( 0.5 ن )

لدينا :

$$\frac{h-0}{p-0}=\frac{ip}{p}=i \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{|h-0|}{|p-0|}=|i| \\ \left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right)\equiv \arg\left(\dfrac{h-0}{p-0}\right)\ [2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{OH}{OP}=1 \\ \left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right)\equiv \arg(i)\ [2\pi]\ ;\ \left(\dfrac{h}{p}=i\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} OH=OP \\ \left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right)\equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases}$$

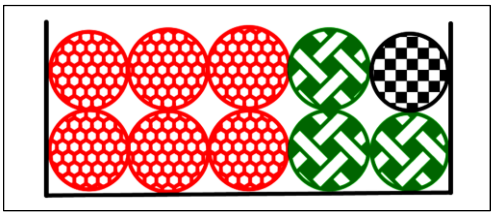
و منه :

- $OH=OP$ المثلث $OHP$ متساوي الساقين في $O$ .
- $\left(\overrightarrow{OP},\overrightarrow{OH}\right)\equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ المثلث $OHP$ قائم الزاوية في $O$

خلاصة : المثلث $OHP$ قائم الزاوية و متساوي الساقين في $O$ .

## .03 ........................................ ( 3 نقط )

يحتوي صندوق: على 10 كرات : ثلاث كرات خضراء و ست كرات حمراء و كرة واحدة سوداء لا يمكن التميز بينها باللمس .



نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و تآنيا ثلاث كرات من الصندوق .

نعتبر الأحداث التالية :

✓ الحدث $A$ : " الحصول على ثلاث كرات خضراء "

✓ الحدث $B$ : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

✓ الحدث $C$ : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

**.01** نبين أن : $p(A)=\frac{1}{120}$ و $p(B)=\frac{7}{40}$ ........................................ ( 2 ن )

✓ عدد السحبات الممكنة ( أي $card\Omega$ ) :

سحب ثلاث كرات في آن واحد من بين 10 كرات يمثل تأليفة ل 3 من بين 10 . ومنه عدد السحبات هو عدد التأليفات ل 3 من بين 10 إذن : $card\Omega=C_{10}^{3}=\frac{10\times9\times8}{1\times2\times3}=120$

إذن : $card\Omega=C_{10}^{3}=120$ .

- نبين أن : $p(A)=\frac{1}{120}$.

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث $A$ ( أي $cardA$ ) :

✓ الحدث $A$ " الحصول على ثلاث كرات خضراء "

❖ الكرات الثلاث المسحوبة في آن واحد من اللون الأخضر من بين 3 إذن $C_3^3=\frac{3\times2\times1}{1\times2\times3}=1$ ( ملحوظة $C_n^n=1$ )

و منه : $cardA=C_3^3=1$ و بالتالي : $p(A)=\frac{cardA}{card\Omega}=\frac{C_3^3}{C_{10}^3}=\frac{1}{120}$ .

خلاصة : $\boxed{p(A)=\frac{1}{120}}$

❖ نبين أن : $p(B)=\frac{7}{40}$ .

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث B ( أي cardB ) :

✓ الحدث B " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "

الحدث B نعبر عنه أيضا بما يلي : B " الكرات الثلاث المسحوبة من اللون أخضر أو الكرات الثلاث المسحوبة من اللون أحمر "

- الكرات الثلاث المسحوبة و في آن واحد و من اللون أخضرمن بين 3 كرات من اللون أخضر إذن $C_3^3=1$ .
- الكرات الثلاث المسحوبة و في آن واحد و من اللون أحمر من بين 6 كرات من اللون أحمر إذن : $C_6^3=\frac{6\times5\times4}{3\times2\times1}=20$ .
- ومنه $\boxed{cardB=C_3^3+C_6^3=1+20=21}$

ومنه : $p(B)=\frac{cardB}{card\Omega}=\frac{C_3^3+C_6^3}{C_{10}^3}=\frac{21}{120}=\frac{7\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times40}=\frac{7}{40}$ .

خلاصة : $\boxed{p(B)=\frac{7}{40}}$

**.02** نحسب : $p(C)$ . ........................................................................................................ ( 1 ن )

✓ الحدث C : " الحصول على كرتين على الأقل من نفس اللون "

✓ عدد السحبات التي تحقق الحدث C ( أي cardC ) :

الطريقة 1 :

الحدث المضاد للحدث C هو $\overline{C}$ " الحصول على كرة واحدة من كل لون "

الحدث $\overline{C}$ نعبر عنه أيضا بما يلي : $\overline{C}$ " الكرات الثلاث المسحوبة من ألوان مختلفة "

و منه : $card\overline{C}=C_3^1\times C_6^1\times C_1^1=3\times6\times1=18$

ومنه : $cardC=card\Omega-card\overline{C}=120-18=102$

ومنه : $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{card\Omega-card\overline{C}}{C_{10}^3}=\frac{120-18}{120}=\frac{102}{120}=\frac{\cancel{6}\times17}{\cancel{6}\times20}=\frac{17}{20}$

خلاصة : $\boxed{p(C)=\frac{17}{20}}$

الطريقة 2 :

الحدث C نعبر عنه أيضا بما يلي : C " ( الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون ) أو (الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون ) "

- ( الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون ) إذن الحدث B إذن $\boxed{cardB=C_3^3+C_6^3=1+20=21}$
- ( الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون ) إذن: " ( كرتين من اللون أخضر وكرة من اللونين المتبقيين ) او ( كرتين من اللون أحمر و كرة من اللونين المتبقيين ) "
- ( كرتين من اللون أخضر وكرة من اللونين المتبقيين وعددها 7 ) و هو يتم ب $C_3^2\times C_7^1$ كيفية مختلفة .
- ( كرتين من اللون أحمر و كرة من اللونين المتبقيين و عددها 4 ) و هو يتم ب $C_6^2\times C_4^1$ كيفية مختلفة .
- . إذن ( الحصول على كرتين بالضبط من نفس اللون ) و هو يتم ب $C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1=3\times7+15\times4=81$ كيفية مختلفة .
- ومنه : $cardC=C_3^3+C_6^3+C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1=1+20+3\times7+15\times4=102$

و بالتالي : $p(C)=\frac{cardC}{card\Omega}=\frac{C_3^3+C_6^3+C_3^2\times C_7^1+C_6^2\times C_4^1}{C_{10}^3}=\frac{1+20+3\times7+15\times4}{120}=\frac{102}{120}=\frac{\cancel{6}\times17}{\cancel{6}\times20}=\frac{17}{20}$ .

خلاصة : $\boxed{p(C)=\frac{17}{20}}$

**.04** ........................................................................ ( 11 نقطة )

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f(x)=x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2$ .

و $(C)$ المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ( الوحدة 1 cm ) .

**I. الجزء الأول :**

**.01** أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$ ثم أول النتيجة هندسيا . ........................................ ( 0.5 ن )

❖ نحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)$

لدينا :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ .

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} \ln x=-\infty \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} -\ln x=+\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} (\ln x)^2=+\infty\end{cases}$

- و منه : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2=+\infty$ .

خلاصة : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ .

❖ نؤول النتيجة هندسيا :

بما أن : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x)=+\infty$ إذن المنحنى $(C)$ يقبل مقاربا عموديا هو المستقيم الذي معادلته $x=0$ ( أي محور الأراتيب )

**.02**

أ- نتحقق أن : لكل x من المجال $]0,+\infty[$ : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$ . ........................ ( 0.25 ن )

لدينا :

$$\begin{aligned}x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x&=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\ln x\times\ln x-\ln x\\&=x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(\ln x)^2-\ln x\\&=f(x)\end{aligned}$$

خلاصة : لكل x من المجال $]0,+\infty[$ : $f(x)=x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x$ .

ب- نستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ . ........................................ ( 0.5 ن )

لدينا : $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} x+\frac{1}{2} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ إذن : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\ln x - 1\right)\ln x = +\infty$

و منه : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x\right) = +\infty$

خلاصة : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

ج- نبين أن لكل $x$ من المجال $]0,+\infty[$ : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ ثم نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ . ...................... ( 0.5 ن )

- نبين أن : $\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2$ .

لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{(\ln x)^2}{x} &= \frac{\left(\ln\left(\sqrt{x}^2\right)\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\\ &= \frac{\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2} \quad ; \left(\ln x^r = r\ln x \; ; r\in\mathbb{Q}\right)\\ &= \frac{4\left(\ln\sqrt{x}\right)^2}{\left(\sqrt{x}\right)^2}\\ &= 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\end{aligned}$$

خلاصة : $\boxed{\frac{(\ln x)^2}{x} = 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2}$.

- نستنتج أن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ .

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} &= \lim_{x\to+\infty} 4\left(\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\right)^2\\ &= \lim_{t\to+\infty} 4\left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 \quad ; \left(t=\sqrt{x} \; ; x\to+\infty \; ; t\to+\infty\right)\\ &= 0 \quad ; \left(\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0\right)\end{aligned}$$

خلاصة : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x} = 0}$.

د- نبين أن المنحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المقارب المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ . ................( 0.75 ن )

لدينا :

• $$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{2x}-\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{2}\frac{(\ln x)^2}{x}=1$$

لأن : $\lim_{x\to+\infty}1+\frac{1}{2x}=1$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$ ( حسب ما سبق )

إذن : $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

• $$\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim_{x\to+\infty}\cancel{x}+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)\ln x-\cancel{x}=+\infty$$ ( لأن $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ )

إذن : $b=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=+\infty$

وبالتالي : $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ و $a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ و $b=\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=+\infty$

خلاصة : المنحنى $(C)$ يقبل فرعا شلجميا في اتجاه المستقيم $(\Delta)$ الذي معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$.

## 03..

أ- نبين أن لكل $x$ من $]0,1]$ : $(x-1)+\ln x\le 0$ و أن لكل $x$ من $[1,+\infty[$ : $(x-1)+\ln x\ge 0$ . ........................ ( 0.5 ن )

• نبين أن لكل $x$ من $]0,1]$ : $(x-1)+\ln x\le 0$ .

لدينا :

$$0<x\le 1\Rightarrow\begin{cases}-1<x-1\le 0\\ \ln x\le 0\end{cases}$$

$\Rightarrow(x-1)+\ln x\le 0$ ( مجموع عددين سالبين هو عدد سالب ) .

و منه : لكل $x$ من $]0,1]$ : $(x-1)+\ln x\le 0$ .

• نبين أن لكل $x$ من $[1,+\infty[$ :

لدينا :

$$x\ge 1\Rightarrow\begin{cases}x-1\ge 0\\ \ln x\ge 0\end{cases}$$

$\Rightarrow(x-1)+\ln x\le 0$ ( مجموع عددين موجبين هو عدد موجب )

و منه : لكل $x$ من $[1,+\infty[$ : $(x-1)+\ln x\ge 0$ .

خلاصة : لكل $x$ من $]0,1]$ : $(x-1)+\ln x\le 0$ و أن لكل $x$ من $[1,+\infty[$ : $(x-1)+\ln x\ge 0$ .

ملحوظة : يمكن استعمال جدول الإشارة لكل من $x-1$ و $\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$ .

ب- نبين أن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$ . ............................................................................. ( 1 ن )

لدينا :

$$f'(x)=\left(x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right)'$$
$$=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\times 2(\ln x)'\ln x$$
$$=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\times\ln x$$
$$=\frac{x-1+\ln x}{x}$$

خلاصة : لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$ .

ج- نضع جدول تغيرات الدالة $f$ . ........................................ ( 0.5 ن )

| $x$ | $0$ $\qquad$ $1$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f'(x)$ | ‖ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$ |
| $f(x)$ | ‖ $+\infty \searrow \frac{3}{2} \nearrow +\infty$ |

## .04

أ- نبين أن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ . ........................................ ( 0.5 ن )

لدينا :

$$f''(x)=(f'(x))'$$
$$=\left(\frac{x-1+\ln x}{x}\right)'$$
$$=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\times x-(x-1+\ln x)\times 1}{x^2}$$
$$=\frac{\cancel{x}+1-\cancel{x}+1-\ln x}{x^2}$$
$$=\frac{2-\ln x}{x^2}$$

خلاصة : لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $f''(x)=\frac{2-\ln x}{x^2}$ .

ب- نستنتج أن المنحنى $(C)$ يقبل نقطة انعطاف يتم تحديد إحداثيتيها ........................................ ( 0.5 ن )

- ❖ لتحديد نقطة انعطاف الدالة $f$ ندرس إشارة $f''$ الدالة المشتقة الثانية ل $f$ .
- ❖ إشارة $f''$ هي إشارة $2-\ln x$ لأن $x^2>0$

لدينا : $2-\ln x\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\leq 2$

$\Leftrightarrow x \leq e^2$

ومنه إشارة $f''$ بواسطة الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | | $e^2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | ‖ | $+$ | $0$ | $-$ | |

❖ من خلال الجدول :

الدالة المشتقة الثانية $f''$ تنعدم في $e^2$ و تتغير إشارتها بجوار $e^2$ إذن النقطة التي زوج إحداثيتيها $\left(e^2, f\left(e^2\right)\right) = \left(e^2, \frac{2e^2+1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى الدالة $f$ .

## 05..

أ- نبين أن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ ثم نستنتج الوضع النسبي للمنحنى $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ ... ( 0.5 ن )

• نبين أن لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$

لدينا : 
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2 &= \frac{1}{2}\left((\ln x)^2 - 2\ln x + 1\right)\\ &= \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2}\\ &= \underbrace{\frac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x + \frac{1}{2} + x}_{f(x)} - x\\ &= f(x) - x\end{aligned}$$

خلاصة : لكل $x$ من $]0,+\infty[$ : $f(x) - x = \frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$.

• نستنتج الوضع النسبي للمنحنى $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ .

لهذا ندرس إشارة : $f(x) - x$ أي إشارة $\frac{1}{2}(\ln x - 1)^2$ و هي بدورها موجبة على $]0,+\infty[$ ولكن تنعدم في $0$ $\ln x - 1 = 0$ أي $x = e$ .

خلاصة :

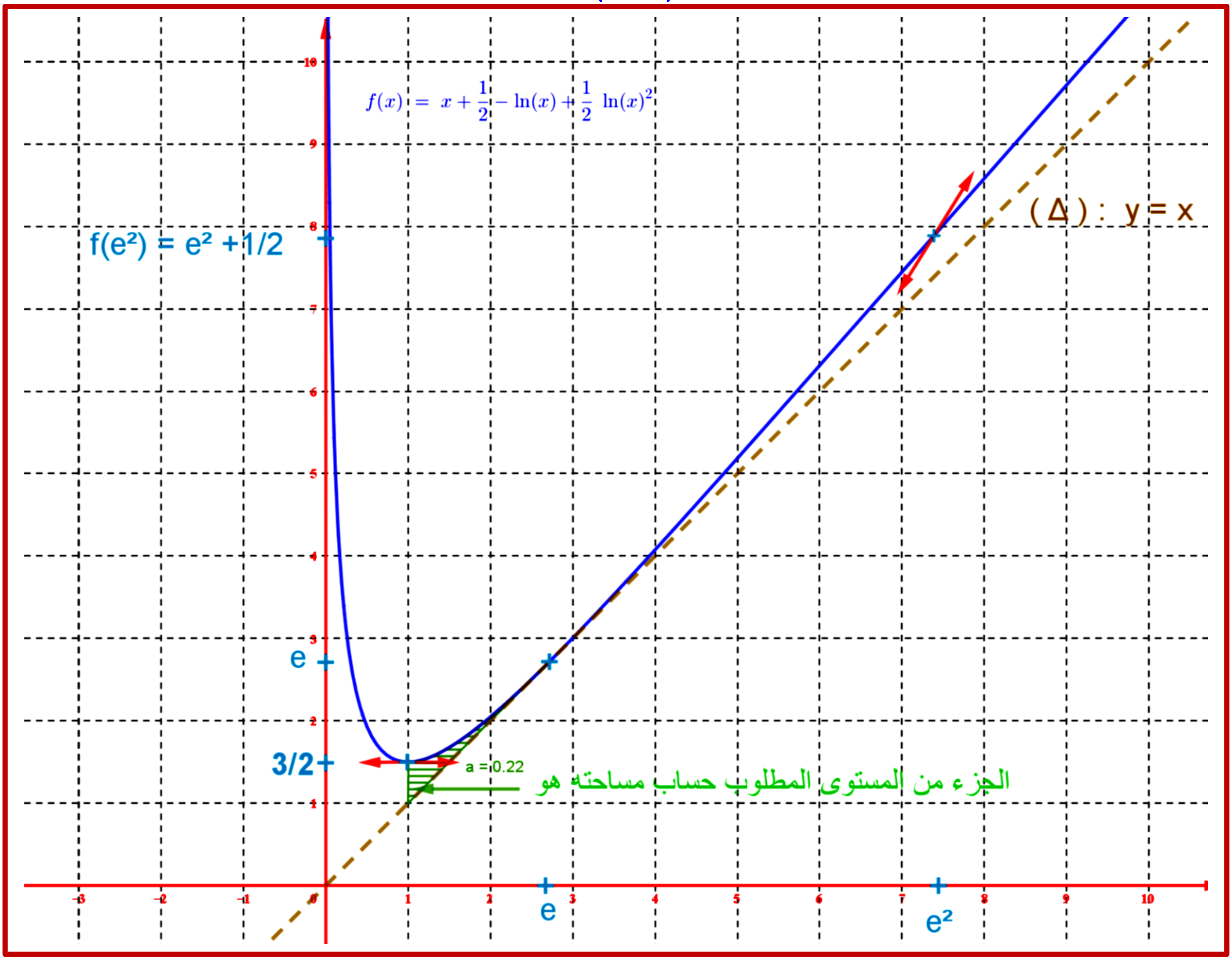
➢ المنحنى $(C)$ يوجد قطعا فوق المستقيم $(\Delta)$ على كل من المجالين $]0,e[$ و $]e,+\infty[$ .

➢ المنحنى $(C)$ يقطع المستقيم $(\Delta)$ في النقطة التي إحداثيتيها $(e, f(e)) = (e, e)$

➢ نلخص ذلك بواسطة الجدول التالي :

| $x$ | $0$ | | $e$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x) - x$ و $(\ln x - 1)^2$ لهما نفس الإشارة | ‖ | $+$ | $0$ | $+$ | |
| الوضع النسبي للمنحنى $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ | ‖ | $(C)$ فوق $(\Delta)$ | $(C)$ و $(\Delta)$ يتقطعان في $x = e$ | $(C)$ فوق $(\Delta)$ | |

ب- ننشئ المستقيم $(\Delta)$ و المنحنى $(C)$ في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ . ........................................................................ ( 1 ن )




..06

أ- نبين أن : الدالة $H\ :\ x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h\ :\ x \mapsto \ln x$ على $]0,+\infty[$ ................................ ( 0.5 ن )

لهذا نبين أن : $H'(x) = h(x)$ .

لدينا :
$$\begin{aligned} H'(x) &= (x\ln x - x)' \\ &= (x)'\ln x + (x)(\ln x)' - (x)' \\ &= 1\times\ln x + \cancel{x}\times\frac{1}{\cancel{x}} - 1 \\ &= \ln x + \cancel{1} - \cancel{1} \\ &= \ln x = h(x) \end{aligned}$$

و منه : $H'(x) = h(x)$

خلاصة : الدالة $H\ :\ x \mapsto x\ln x - x$ هي دالة أصلية للدالة $h\ :\ x \mapsto \ln x$ على $]0,+\infty[$ .

ب- باستعمال مكاملة بالأجزاء نبين أن : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2$ . ........................................................ ( 0.75 ن )

نكتب : $\int_1^e (\ln x)^2 dx = \int_1^e (\ln x)\times(\ln x) dx$

نضع :

$$\begin{array}{lll} u(x)=\ln x & & u'(x)=\dfrac{1}{x} \\ (1)\downarrow & (2)\searrow \quad - & \downarrow(3) \\ v'(x)=\ln x & & v(x)=x\ln x - x \end{array}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\overbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}^{(1)} &= \overbrace{\left[\ln x\times(x\ln x - x)\right]_1^e}^{(2)} - \overbrace{\int_1^e \frac{1}{x}\times(x\ln x - x)dx}^{(3)} \\
&= \left(\ln e\times(e\ln e - e)\right) - \left(\ln 1\times(1\ln 1 - 1)\right) - \int_1^e (\ln x - 1)dx \\
&= \left(1(e\times 1 - e) - 0\right) - \int_1^e \ln x dx + \int_1^e 1 dx \\
&= 0 - [x\ln x - x]_1^e + [x]_1^e \quad ; \quad \left(H'(x)=h(x)\right) \\
&= -\left((e\times 1 - e) - (1\times 0 - 1)\right) + (e-1) \\
&= 0 - 1 + e - 1 \\
&= e-2
\end{aligned}$$

خلاصة : $\boxed{\int_1^e (\ln x)^2 dx = e-2}$

ج- نحسب ب $cm^2$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(C)$ و $(\Delta)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ .
( 0.5 ن ) ........................................................................................................

المساحة المطلوبة هي :

( وحدة المساحة ) $\left(\int_1^e (f(x)-x)dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\ cm^2 = \left(\int_1^e |f(x)-x|dx\right)\times\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$ . ( لأن $(C)$ فوق $(\Delta)$ على $[1,e]$ )

$$\begin{aligned}
&= \left(\int_1^e \left(\cancel{x} + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2 - \cancel{x}\right)dx\right)\times 1\times 1\ cm^2 \\
&= \int_1^e \frac{1}{2}dx - \int_1^e \ln x dx + \frac{1}{2}\underbrace{\int_1^e (\ln x)^2 dx}_{e-2} \quad cm^2 \\
&= \frac{1}{2}[x]_1^e - [x\ln x - x]_1^e + \frac{1}{2}(e-2) \quad cm^2 \\
&= \frac{1}{2}(e-1) \underbrace{-\left((e\times 1 - e) - (1\times 0 - 1)\right)}_{-1} + \frac{1}{2}(e-2) \quad cm^2 \\
&= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - 1 + \frac{e}{2} - 1 = e - \frac{5}{2} \quad cm^2
\end{aligned}$$

خلاصة : مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(C)$ و $(\Delta)$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=1$ و $x=e$ هي $\frac{2e-5}{2}\ cm^2$ .

## II. الجزء الثاني :

لتكن المتتالية العددية $(u_n)$ المعرفة كما يلي : $u_0=1$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ .

### 01..

أ- نبين بالترجع أن : $1\le u_n\le e$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ ............ ( 0.5 ن )

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n=0$

لدينا : $1\le u_0=1\le e$ و منه العلاقة صحيحة من أجل $n=0$ .

- نفترض أن العلاقة صحيحة للرتبة $n$ : أي $1\le u_n\le e$ ( معطيات الترجع ) .
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$ : أي نبين أن : $1\le u_{n+1}\le e$

حسب معطيات الترجع لدينا : $1\le u_n\le e$.

و منه : $1\le u_n\le e \Rightarrow f(1)\le f(u_n)\le f(e)$ ( لأن f تزايدية على $[1,e]$ و $1\le u_n\le e$ )

$\Rightarrow \frac{3}{2}\le u_{n+1}\le e$ ( لأن $f(e)=e$ تقاطع مع المستقيم $(\Delta)$ و $f(1)=\frac{3}{2}$ جدول تغيرات)

$\Rightarrow 1\le \frac{3}{2}\le u_{n+1}\le e$

و منه : العلاقة صحيحة ل $n+1$ .

خلاصة : $1\le u_n\le e$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ .

ب- نبين أن المتتالية $(u_n)$ تزايدية............ ( 0.5 ن )

لهذا نبين أن: $u_{n+1}-u_n\ge 0$ لكل $n$ من $\mathbb{N}$ .

ليكن $n$ من $\mathbb{N}$ نضع $x=u_n$ و لدينا : $1\le u_n\le e$ أي $u_n\in[1,e]$

حسب نتيجة السؤال I (5) أ- ): $(C)$ فوق $(\Delta)$ على $[1,e]$ إذن : لكل $x$ من $[1,e]$ فإن $f(x)-x\ge 0$ أي $f(x)\ge x$.

أي : $x\in[1,e]\Rightarrow f(x)\ge x$

$\Rightarrow f(u_n)\ge u_n\ ;\ (u_n=x$ و $1\le u_n\le e)$

$\Rightarrow u_{n+1}\ge u_n\ ;\ (u_{n+1}=f(u_n))$

$\Rightarrow u_{n+1}-u_n\ge 0$

و بالتالي : لكل $n$ من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}\ge u_n$ ( أو أيضا $u_{n+1}-u_n\ge 0$ )

خلاصة : المتتالية $(u_n)$ تزايدية .

ملحوظة : يمكن استعمال الترجع ( أي نبين لكل $n$ من $\mathbb{N}$ لدينا $u_{n+1}\ge u_n$ )

ج- نستنتج أن المتتالية $(u_n)$ متقاربة . ............ ( 0.5 ن )

لدينا :

- ✓ المتتالية $(u_n)$ تزايدية.
- ✓ المتتالية $(u_n)$ مكبورة ( لأن $1\le u_n\le e$ )

إذن حسب خاصية : المتتالية $(u_n)$ متقاربة ( مع نهايتها $\ell$ حيث $\ell \in \mathbb{R}$ )

خلاصة : $(u_n)$ متقاربة

**02.** نحدد نهاية المتتالية $(u_n)$ . .................................................................................................... ( 0.75 ن )

- المتتالية تكتب على شكل $u_{n+1} = f(u_n)$
- الدالة $f$ متصلة على $I = [1,e]$
- $f(I) = [f(1), f(e)] = \left[\frac{3}{2}, e\right] \subset I = [1,e]$ ( لأن $f$ متصلة و تزايدية على $[1,e]$ و $f(e) = e$ و $f(1) = \frac{3}{2}$ )
- لدينا : $u_0 = 1 \in [1,e]$
- $(u_n)$ متقاربة إذن نهايتها $\ell$ من $\mathbb{R}$ .

إذن : $\ell$ هو حل للمعادلة $f(x) = x$ ; $x \in I = [1,e]$ ( حسب خاصية ) .

أي ندرس تقاطع المنحنى $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ على $[1,e]$ و حسب ما سبق المنحنى $(C)$ و المستقيم $(\Delta)$ يتقاطعان في نقطة وحيدة حيث زوج إحداثيتيها هي $(e,e)$ و منه حل المعادلة السابقة هي $x = e \in [1,e]$ إذن $\ell = e$

خلاصة : $\lim_{n\to+\infty} u_n = e$