أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول :

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-3,0,0) \\ B(0,0,-3) \\ C(0,2,-2) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(3,0,-3) \\ \overrightarrow{AC}(3,2,-2) \end{cases}$

و منه :
$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k})$

و نعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على (ABC) .

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستوى (ABC) .

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .

فإن المتجهتان $\overrightarrow{AM}$ و $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$

يعني : $\begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

يعني : $6(x+3) - 3y + 6z = 0$

يعني : $2x - y + 2z + 6 = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

1 ب

لدينا : $\begin{cases} (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \\ \Omega(1,1,1) \end{cases}$

إذن : $d(\Omega, (ABC)) = \dfrac{|2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \dfrac{9}{\sqrt{9}} = 3$

نلاحظ إذن أن : $d(\Omega, (ABC)) = 3 = Rayon(\mathcal{S})$

إذن : المستوى (ABC) مماس للفلكة $(\mathcal{S})$ في نقطة $H(\alpha, \beta, \gamma)$.

2 أ

لتكن $M(x,y,z)$ نقطة من المستقيم (D) . لدينا $\begin{cases} (D) \perp (ABC) \\ \Omega \in (D) \end{cases}$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ مستقيميتان .

يعني : $(\exists \theta \in \mathbb{R})$; $\overrightarrow{\Omega M} = \theta(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$

يعني : $(\exists \theta \in \mathbb{R})$; $\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

يعني : $(D) : \begin{cases} x - 1 = 6\theta \\ y - 1 = -3\theta \\ z - 1 = 6\theta \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

يعني : $(D) : \begin{cases} x = 6\theta + 1 \\ y = -3\theta + 1 \\ z = 6\theta + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

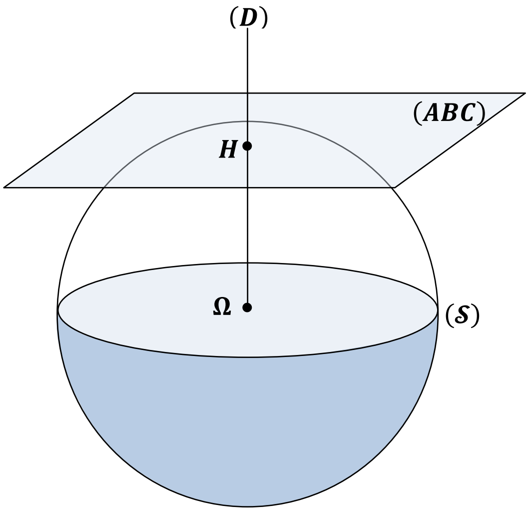
يعني : $(D) : \begin{cases} x = 2(3\theta) + 1 \\ y = -(3\theta) + 1 \\ z = 2(3\theta) + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

نضع : $3\theta = t$ نحصل على : $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامتري للمستقيم (D) .

2 ب

في هذا السؤال سوف نستعمل التمثيل البارامتري للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) . و نستعين بالشكل التالي :



بما أن المستوى (ABC) مماس لـ $(\mathcal{S})$ في H . فإن : $\boxed{(\Omega H) \perp (ABC)}$ (1)

و نعلم أن : $\boxed{(D) \perp (ABC)}$ (2)

إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $(\Omega H) \parallel (D)$

و بما أن : Ω نقطة مشتركة بين المستقيمين (ΩH) و (D) .

فإن المستقيمان (D) و (ΩH) منطبقان . يعني : $\boxed{H \in (D)}$ (3)

حصلنا إذن على ما يلي : $\begin{cases} H \in (D) \\ H \in (ABC) \end{cases}$

و لدينا : $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

و لدينا كذلك : $\begin{cases} H(\alpha, \beta, \gamma) \\ (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$

بما أن $H(\alpha, \beta, \gamma)$ نقطة مشتركة بين المستقيم (D) و المستوى (ABC) .

فإن المثلوث (α, β, γ) يحقق كلاً من التمثيل البارمتري للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) .

إذن : $(\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} \alpha = 2t + 1 \\ \beta = -t + 1 \\ \gamma = 2t + 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma + 6 = 0 \end{cases}$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$2(2t + 1) - (-t + 1) + 2(2t + 1) + 6 = 0$

يعني : $4t + t + 4t + 9 = 0$ إذن : $\boxed{t = -1}$

نعوض t بقيمته -1 في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 2(-1)+1 = -1 \\ \beta = -(-1)+1 = 2 \\ \gamma = 2(-1)+1 = -1 \end{cases}$$

و بالتالي : $H(-1,2,-1)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة $(\mathcal{S})$

التمرين الثاني :

1 أ

لدينا : $\dfrac{c-a}{b-a} = \dfrac{(8+3i)-(2-i)}{(6-7i)-(2-i)} = \dfrac{6+4i}{4-6i} = \dfrac{3+2i}{2-3i}$

$= \dfrac{(3+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \dfrac{6+13i-6}{2^2-(3i)^2} = \dfrac{13i}{4+9} = \dfrac{13i}{13} = i$

و بالتالي : $\boxed{\dfrac{c-a}{b-a} = i}$ $(*)$

1 ب

لدينا : $\dfrac{c-a}{b-a} = i$ إذن : $\begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = |i| \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \arg(i) \ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\dfrac{c-a}{b-a}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} |c-a| = |b-a| \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} AC = AB \\ \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} \ [2\pi] \end{cases}$

و بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .

2 أ

لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$. إذن : $aff(\Omega) = \dfrac{aff(B)+aff(C)}{2}$

يعني : $aff(\Omega) = \dfrac{(6-7i)+(8+3i)}{2} = (7-2i) = \omega$

2 ب

لدينا $\mathcal{R}$ دوران مُعرف بما يلي : $\mathcal{R}_\Omega\left(\dfrac{-\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$

و ننطلق من الكتابة التالية : $\mathcal{R}(M) = M'$

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow (z'-\omega) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z-\omega) \\ &\Leftrightarrow z'-(7-2i) = \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)(z-7+2i) \\ &\Leftrightarrow z'-(7-2i) = (-i)(z-7+2i) \\ &\Leftrightarrow z' = -iz+7i+2+7-2i \\ &\Leftrightarrow z' = -iz+5i+9 \end{aligned}$$

و هذه الكتابة الأخيرة تُعَبِّرُ عن الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$.

و بذلك يصبح الدوران $\mathcal{R}$ مُعَرّف بما يلي :

$$\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \mapsto & M'(-iz+5i+9) \end{array}$$

2 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $aff(C) = -i\,aff(A)+5i+9$

لدينا حسب المعطيات : $aff(A) = a = (2-i)$

إذن : $-i\,aff(A)+5i+9 = -i(2-i)+5i+9$

$= -2i-1+5i+9 = 3i+8 = aff(C)$

حصلنا إذن على : $-i\,aff(A)+5i+9 = aff(C)$

إذن حسب الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = C$

التمرين الثالث :

1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $\boxed{(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1}$

من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 3 > 1$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .

ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفترض أن : $u_n > 1$.

نحتاج إلى أن نبرهن على أن : $u_{n+1} > 1$

و عادة ما ننطلق من $u_{n+1} > 1$ لكي نحدد العبارة التي سننطلق منها باستعمال المسار العكسي و هو ما سوف أعرضه الآن :

> نحتاج إلى : $u_{n+1} > 1$
>
> يعني نحتاج إلى : $\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} > 1$
>
> يعني نحتاج إلى : $4u_n+3 > 3u_n+4$
>
> يعني نحتاج إلى : $u_n > 1$
>
> و هذه المتفاوتة متوفرة لدينا حسب الإفتراض

إذن تمكنا من إيجاد المسار العكسي للبرهان .

و البرهان الذي يجب كتابته على ورقة التحرير هو التالي :

لدينا حسب الافتراض : $u_n > 1$

إذن : $4u_n - 3u_n > 4-3$ يعني : $4u_n+3 > 3u_n+4$

يعني : $\dfrac{4u_n+3}{3u_n+4} > 1$ يعني : $u_{n+1} > 1$

أي أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .

خلاصة : حصلنا على النتائج التالية : $\begin{cases} (P_0) \ est \ vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) \ ; \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

إذن حسب مبدأ الترجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

2 أ

ليكن : $(n \in \mathbb{N})$. لدينا : $1 - v_n = 1 - \dfrac{u_n-1}{u_n+1}$

$= \dfrac{u_n+1}{u_n+1} - \dfrac{u_n-1}{u_n+1} = \dfrac{2}{u_n+1}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 - v_n = \dfrac{2}{u_n+1}$

و نعلم حسب السؤال 1) أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n > 1$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ u_n + 1 > 2 > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \dfrac{1}{u_n+1} > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ \dfrac{2}{u_n+1} > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ ; \ 1 - v_n > 0$

2 ب

ليكن $n\in\mathbb{N}$. لدينا حسب السؤال أ) : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

إذن : $v_n(u_n + 1) = u_n - 1$

يعني : $v_n u_n + v_n = u_n - 1$

أي : $v_n u_n - u_n = -1 - v_n$

يعني : $u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$

أي : $u_n = \dfrac{-1 - v_n}{v_n - 1}$ أي : $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

3 أ

لدينا حسب السؤال 2 أ) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n + 1}$

أي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = 1 - \dfrac{2}{u_{n+1} + 1}$

$$= 1 - \frac{2}{\left(\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1\right)} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{7u_n + 7}{3u_n + 4}\right)}$$

$$= 1 - \frac{2(3u_n + 4)}{7u_n + 7} = \frac{7u_n + 7 - 6u_n - 8}{7u_n + 7}$$

$$= \frac{(u_n - 1)}{7(u_n + 1)} = \frac{1}{7} v_n$$

و بالتالي : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_{n+1} = \frac{1}{7}\, v_n$

يعني : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

إذن الحد العام v_n يكتب على الشكل التالي : $v_n = v_0 \left(\frac{1}{7}\right)^{n-0}$

لدينا : $v_0 = \dfrac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \dfrac{3 - 1}{3 + 1} = \dfrac{1}{2}$ إذن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ v_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{7}\right)^n$

3 ب

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{7}\right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

إذن : $\lim\limits_{n\infty} \left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$ و منه : $\lim\limits_{n\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{7}\right)^n = 0$

يعني : $\lim\limits_{n\infty}(v_n) = 0$

و لدينا حسب السؤال 2 أ) : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ 1 - v_n = \dfrac{2}{u_n + 1}$

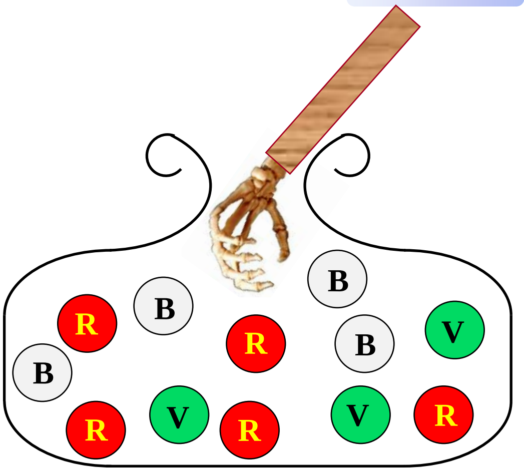
يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n + 1 = \dfrac{2}{1 - v_n}$

يعني : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ u_n = \dfrac{2}{1 - v_n} - 1$

و بالتالي : $\lim\limits_{n\infty}(u_n) = \lim\limits_{n\infty}\left(\dfrac{2}{1 - v_n} - 1\right) = \dfrac{2}{1 - 0} - 1 = 1$

يعني : $\boxed{\lim\limits_{n\infty}(u_n) = 1}$

التمرين الرابع :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 12 كرة فإن التجربة تَحتمل C_{12}^3 نتيجة ممكنة .

يعني : $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$. بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

$$p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right) = \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

2

$$p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون}\right) = p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء} \text{ أو } \text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء} \text{ أو } \text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)$$

$$= p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right) + p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء}\right) + p\left(\text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)$$

$$= \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات حمراء}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات بيضاء}\right)}{card(\Omega)} + \frac{card\left(\text{الحصول على ثلاث كرات خضراء}\right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_5^3}{220} + \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :

الطريقة الأولى :

$$p\left(\text{الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل}\right) = p\left(\text{كرة حمراء و كرتان تخالفان اللون الأحمر} \text{ أو } \text{كرتين حمراوين و الأخرى مخالفة للأحمر} \text{ أو } \text{ثلاث كرات حمراء}\right)$$

$$= p\left(\text{كرة حمراء و كرتان تخالفان اللون الأحمر}\right) + p\left(\text{كرتين حمراوين و الأخرى مخالفة للأحمر}\right) + p\left(\text{ثلاث كرات حمراء}\right)$$

$$= \frac{C_5^1 \times C_7^2}{card(\Omega)} + \frac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} + \frac{C_5^3 \times C_7^0}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{5 \times 21}{220} + \frac{10 \times 7}{220} + \frac{10}{220} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

الطريقة الثانية : استعمال تقنية الحدث المضاد .

إذا كان $\bar{A}$ هو الحدث المضاد للحدث A فإن : $p(A)=1-p(\bar{A})$

نضع : $A=\{$ الحصول على كرة واحدة على الأقل $\}$

إذن : $\bar{A}=\{$ الحصول على ثلاث كرات من ألوان تخالف الأحمر $\}$

$$p\left(\text{ثلاث كرات تخالف اللون الأحمر}\right)=p\left(\text{ثلاث كرات بيضاء أو ثلاث كرات خضراء أو كرتين بيضاوين و الأخرى خضراء أو كرتين خضراوين و الأخرى بيضاء}\right)$$

$$=p\left(\text{ثلاث كرات بيضاء}\right)+p\left(\text{ثلاث كرات خضراء}\right)+p\left(\text{كرتين بيضاوين و الأخرى خضراء}\right)+p\left(\text{كرتين خضراوين و الأخرى بيضاء}\right)$$

$$=\frac{C_4^3}{220}+\frac{C_3^3}{220}+\frac{C_4^2\times C_3^1}{220}+\frac{C_3^2\times C_4^1}{220}$$

$$=\frac{4}{220}+\frac{1}{220}+\frac{18}{220}+\frac{12}{220}=\frac{35}{220}=\frac{7}{44}$$

إذن : $p(A)=1-p(\bar{A})$

يعني : $p(A)=1-\frac{7}{44}=\frac{44-7}{44}=\frac{37}{44}$

و بالتالي : احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو : $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس :

1

ليكن x عنصرا من $\mathbb{R}$. لدينا : $f(x)=x+\frac{e^x-1}{e^x+1}$

إذن :
$$f(-x)=-x+\frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=-x+\frac{e^{-x}(1-e^x)}{e^{-x}(1+e^x)}$$
$$=-x+\frac{1-e^{-x}}{1+e^x}=-\left(x+\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)=-f(x)$$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(-x)=-f(x)$

و هذا يعني أن الدالة f دالة فردية و تمثيلها المبياني متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم .

2

لدينا :
$$x+1-\frac{2}{e^x+1}=x+\frac{e^x+1}{e^x+1}-\frac{2}{e^x+1}$$
$$=x+\frac{e^x-1}{e^x+1}=f(x)$$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$

3 أ

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f(x)=x+1-\frac{2}{e^x+1}$

إذن :
$$(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=1-\left(\frac{2}{e^x+1}\right)'$$
$$=1-\left(\frac{-2e^x}{(e^x+1)^2}\right)=1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

من أجل $x=0$ نحصل على :
$$f'(0)=1+\frac{2e^0}{(e^0+1)^2}=1+\frac{2}{2^2}=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

3 ب

لدينا : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)=1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

نعلم أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ e^x>0$

إذن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ 2e^x>0$ و $(e^2+1)^2>0$

و منه : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ 1+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}>0$

يعني : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f'(x)>0$

إذن f دالة تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.

3 ج

نعلم أن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathscr{C})$ في النقطة x_0 تُكتب على الشكل :
$$(T):y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

إذن من أجل $x_0=0$ نجد : $(T):y=f'(0)(x-0)+f(0)$

يعني : $(T):y=f'(0)\cdot x+f(0)$

و لدينا : $f'(0)=\frac{3}{2}$ و $f(0)=0$

إذن المعادلة الديكارتية للمماس (T) تُصبح : $(T):y=\frac{3}{2}x$

4 أ

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{2}{e^x+1}\right)$$
$$=\left(+\infty+1-\frac{2}{+\infty}\right)=(+\infty+1-0)=+\infty$$

4 ب

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x+1)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+1-\frac{2}{e^x+1}-(x+1)\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-2}{e^x+1}\right)=\frac{-2}{+\infty}=0$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x+1)=0$

و منه : $\lim_{x\to+\infty}f(x)-x=1$

و لدينا من جهة أخرى :
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x(e^x+1)}\right)$$
$$=1+\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}=1+0-0=1$$

إذن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

لقد حصلنا لحد الآن على النهايات التالية :
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 1x = 1 \end{cases}$$

إذن من هذه النهايات الثلاث نستنتج أن المستقيم : $(D) : y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathscr{C})$ بجوار $+\infty$.

4 ج

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x+1)$.

لدينا :
$$f(x) - (x+1) = (x+1) - \frac{2}{e^x+1} - (x+1) = \frac{-2}{e^x+1}$$

و نعلم أن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; e^x > 0$

إذن : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; e^x + 1 > 0$

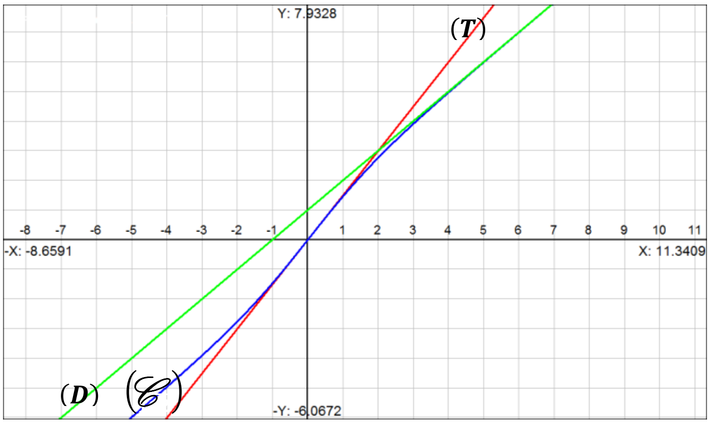
يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; \dfrac{-2}{e^x+1} < 0$

يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; f(x) - (x+1) < 0$

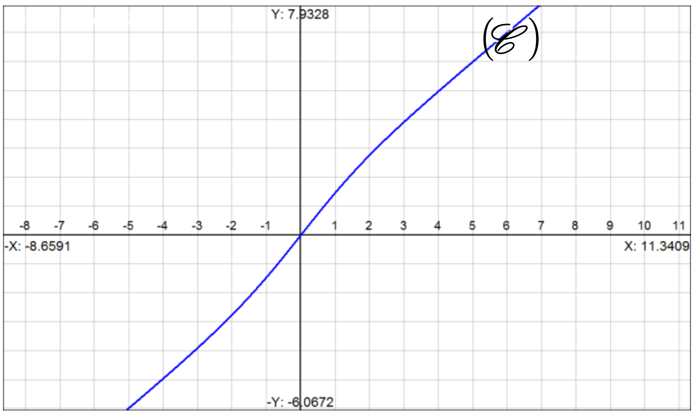
يعني : $(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \; ; \; f(x) < (x+1)$

و بالتالي : المستقيم (D) يوجد فوق المنحنى $(\mathscr{C})$

5



المنحنى $(\mathscr{C})$ لوحده



6 أ

ليكن x عددا حقيقيا . لدينا :
$$H'(x) = (x - \ln(e^x+1))' = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1}{e^x+1} - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1} = h(x)$$

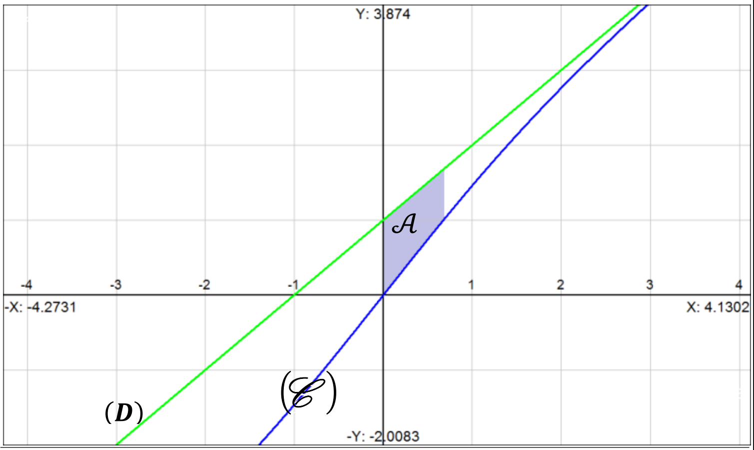
إذن H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

6 ب

$$\int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x+1}\right) dx = \int_0^{\ln 2} h(x)\, dx = [H(x)]_0^{\ln 2}$$
$$= [x - \ln(e^x+1)]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2)$$
$$= 2\ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

6 ج

لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathscr{C})$ و المستقيم (D) و المستقيمين $x = 0$ و $x = \ln 2$. لدينا :
$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x+1)|\, dx = \int_0^{\ln 2} \left|\frac{-2}{e^x+1}\right| dx$$
$$= 2\int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x+1}\right) dx = 2\left(\ln\left(\frac{4}{3}\right)\right) \approx 0{,}57 \; unité^2$$



صورة أخرى للمساحة $\mathcal{A}$