

التمرين الخامس

$$\begin{cases} U_0 = \frac{31}{5} \\ U_{n+1} = \frac{U_n^2 + 5U_n + 10}{3(U_n - 1)} \end{cases}$$

نعتبر المتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث:

(1) أثبت أن $(\forall n \in \mathbb{N}) U_n \geq 5$

(2) بين أن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ تناقصية

(3) بين أن $\frac{1}{10}(U_n - 5) \leq U_{n+1} - 5$ لكل $n \in \mathbb{N}$

و استنتج أن $\frac{6}{5} - U_n \leq \frac{1}{10}(U_n - 5)$ لكل $n \in \mathbb{N}$

(4) حدد نهاية المتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

التمرين السادس

متاليتان معرفتان بما يلي :

$$\begin{cases} V_0 = 12 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases}$$

ونضع $T_n = 3U_n + 8V_n$; $W_n = V_n - U_n$

(1) بين أن $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية هندسية و أحسب W_n بدلالة n

(2) بين أن $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ثابتة محددا قيمتها

(3) استنتج مما سبق V_n ; U_n بدلالة n

التمرين السابع

متالية عدديّة معرفة بما يلي:

$$x_n = U_{n+1} - kU_n \quad \text{و نضع} \quad \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+2} = 4U_{n+1} - 4U_n \end{cases}$$

(1) حدد k بحيث تكون $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية هندسية و حدد أساسها

(2) نفترض أن $k = 2$

أ- بين أن $U_{n+1} = 2U_n + (3 \times 2^n)$

ب- نضع $W_n = 2^n U_n$ بين أن $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية حسابية

ج- حدد U_n بدلالة n

التمرين الثامن

متالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث

$$\mathbb{N} \ni S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = \frac{n^2 + n}{3}$$

أحسب U_0 ; U_1 ; U_n بدلالة n

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية حسابية أساسها $0 \neq r$ و $U_0 = 2$

و بحيث $U_{13} ; U_3 ; U_1$ حدود متتابعة لمتالية هندسية

بين أن $r = -4$ و أحسب الجمع $U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1}$

التمرين الأول

نعتبر المتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{U_n}{3^n U_n + 3}$

و نضع $V_n = \frac{1}{3^n U_n}$ لكل $n \in \mathbb{N}$

Ⓐ أحسب U_1 و $V_0 ; V_1$

Ⓑ بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ حسابية ثم أحسب V_n بدلالة n

Ⓒ استنتج أن $U_n = \frac{1}{3^{n-1} (n+3)}$

التمرين الثاني

نعتبر المتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $U_0 = 1$ و $3U_{n+1} = 2U_n + n + 3$

و لتكن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية بحيث: $V_n = U_n - n$

i. بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية هندسية محددا أساسها و حدها الأول

ii. استنتج أن $U_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$

iii. بين أن $U_0 + U_1 + \dots + U_{99} = 4953 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{100}$

التمرين الثالث

نعتبر المتالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = \frac{1}{5}(U_n - 4n - 1)$

و نضع $V_n = U_n + n - 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$

أ- بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{5}$

ب- أحسب V_n و U_n بدلالة n

ج- أحسب $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n$

نضع $T_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n$

$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

$S_n = T_n - \frac{(n-2)(n+1)}{2}$ و أن $T_n = \frac{1}{4}\left(5 - \frac{1}{5^n}\right)$ بين أن

التمرين الرابع

متالية $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ بحيث: $\begin{cases} 25U_{n+2} = 10U_{n+1} - U_n \\ U_0 = 0 ; U_1 = 1 \end{cases}$

و نضع $W_n = 5^n U_n$ و $V_n = U_{n+1} - \frac{1}{5}U_n$ حيث

1) بين أن $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية هندسية و $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متالية حسابية

2) حدد الحد العام U_n بدلالة n

3) أ- بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{2}{5}U_n$

ب- استنتاج أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*) 0 \leq U_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$