

**تمرين 1** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 1}$  المعرفة بما يلي

$$u_0 = 0 \quad \text{و} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{2u_n + 7} \quad \text{و} \quad \text{نضع} \quad v_n = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 6}$$

(1) (a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); -3 < u_n < \frac{1}{2}$  (b) ادرس رتبة  $(u_n)$

(2) (a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8}(u_n - \frac{1}{2})$

(b) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$

(3) (a) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) احسب  $(v_n)$  ثم  $(u_n)$  بدلالة  $n$  واستنتج  $\lim u_n$  و  $\lim v_n$ .

(c) أحسب  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $\lim S_n$ .

(d) أحسب  $P_n = v_0 \cdot v_1 \cdot \dots \cdot v_n$

**تمرين 2** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:

$$\text{ونضع} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{u_n + 1} \end{cases} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 2}$$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_n > 2$

(2) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

(3) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$

(4) (a) بين أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  بطريقة أخرى.

**تمرين 3** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي:

$$f(x) = \frac{6x}{x^3 + 4}$$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$ .

(2) بين أن  $f$  تقابل من  $[0, \sqrt[3]{2}]$  نحو مجال يجب تحديده.

(3) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ:  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

(a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}): 1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$

(b) بين أن  $(u_n)$  تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب  $\lim u_n$

**تمرين 4** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:

$$u_0 = \frac{3}{2} \quad \text{و} \quad u_{n+1} = u_n^2 - 3u_n + 4$$

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي:  $f(x) = x^2 - 3x + 4$

(a) بين أن  $f([1,2]) \subset [1,2]$

(b) بين أن  $(\forall x \in \mathbb{R}): f(x) \geq x$

(c) استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}): 1 \leq u_n \leq 2$  وأن  $(u_n)$  تناقصية.

(d) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$

**تمرين 5** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 3}{u_n + 2} \end{cases}$$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}): u_n > 3$

(2) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

(3) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}): u_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(u_n - 3)$

(4) استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$

(5) هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة؟

**تمرين 6** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \sqrt[3]{\frac{1}{3}u_n^3 + 2}$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n \geq 1$  ادرس رتبة  $(u_n)$

(3) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$ .

(4) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي  $v_n = u_n^3 - 3$

(a) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية

(b) احسب  $(v_n)$  ثم  $(u_n)$  بدلالة  $n$

**تمرين 7** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة بما يلي:  $u_1 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{(3n+3)u_n - 8n - 12}{n}$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}) : u_n \leq 0$  ادرس رتبة  $(u_n)$

(3) نعتبر المتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي  $v_n = \frac{4-u_n}{n}$

(a) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية حدد أساسها وحدها الأول.

(b) احسب  $(v_n)$  ثم  $(u_n)$  بدلالة  $n$  واستنتج  $\lim u_n$  و  $\lim v_n$ .

**تمرين 8** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = -\frac{1}{3}$  و  $u_{n+1} = 1 - \sqrt[3]{5 - 3u_n}$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 < u_n < 0$  ادرس رتبة  $(u_n)$

(2) استنتج أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n + 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{2}{3}$

(b) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$ .

**تمرين 9** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{u_n^3 + 2}{u_n^2 + 1}$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < 2$  ادرس رتبة  $(u_n)$ .

(3) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$ .

(4) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 2 - u_{n+1} \leq \frac{4}{5}(2 - u_n)$

(b) استنتج بطريقة أخرى أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$

(5) نضع  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

(a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : S_n \geq 2n - 3 + 5\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

(b) واستنتج  $\lim S_n$

**تمرين 10** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = 3$  و  $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n} - \frac{2}{u_n^2}$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 2$  ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$

(3) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$ .

(4) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{4}(u_n - 2)$

(5) استنتج بطريقة أخرى أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$ .

**تمرين 11** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بـ :  $f(x) = (\sqrt{x+1}-1)^3$

- (1) حدد حيز تعريف الدالة  $f$  .  
 (2) بين أن الدالة  $f$  تقابل من المجال  $[-1, +\infty[$  نحو مجال  $J$  يجب تحديده . (b) حدد  $f^{-1}(x)$  لكل  $x$  من  $J$  .

(3) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي : 
$$\begin{cases} u_0 = -\frac{3}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (a) بين : أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : -1 < u_n < 0$   
 (b) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية .  
 (c) حل في  $[-1, +\infty[$  المعادلة  $f(x) = x$  (ضع  $t = \sqrt{x+1}-1$ )  
 (d) بين أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$

**تمرين 12** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :  $f(x) = \frac{1}{4x^2 + 4}$  .

ونعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي : 
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

- (1) ادرس تغيرات  $f$  على  $\mathbb{R}^+$  .  
 (b) بين أن المعادلة  $f(x) = x$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha \in ]0, \frac{1}{2}[$  .  
 (c) بين أن  $(\forall (x, y) \in [0, 1]^2) : |f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$  .

(2) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n \leq \frac{1}{2}$

(3) (a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$

- (b) استنتج أن المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة واحسب نهايتها .

**تمرين 13** نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي : 
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \sqrt{6 - u_n} \end{cases}$$

- (1) ادرس تغيرات  $f(x) = \sqrt{6-x}$  وحدد  $f([0, 6])$  .  
 (2) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) : 0 \leq u_n \leq 6$  .  
 (3) نضع  $w_n = u_{2n+1}$  و  $v_n = u_{2n}$  بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) v_n \leq w_n$  وأن  $(v_n)$  تزايدية و  $(w_n)$  تناقصية .  
 (4) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : |u_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2|$  واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$  .  
 (5) بين أن  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متحاديتان وحدد نهايتهما المشتركة .

**تمرين 14** نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي : 
$$a > 0 : \begin{cases} u_0 \geq \sqrt[3]{a} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + \frac{a}{u_n^2}) \end{cases}$$

- (1) (a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$  .  
 (b) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - \sqrt[3]{a} = \frac{(2u_n + \sqrt[3]{a})}{3u_n^2}(u_n - \sqrt[3]{a})^2$  .  
 (c) قارن بين  $\sqrt[3]{a}$  و  $u_n$  وبين أن  $(u_n)$  متقاربة .  
 (2) بين أن  $u_{n+1} - \sqrt[3]{a} - \frac{2}{3}(u_n - \sqrt[3]{a}) \leq 0$  . واستنتج  $\lim u_n$  .

**تمرين 15**

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{2} < x_n < 1$$

لتكن  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة وتحقق

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + x_{n+1}}{1 + u_n x_{n+1}} \end{cases} \text{ ونعتبر المتتالية } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ المعرفة بما يلي :}$$

(1) (a) بين أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة بـ 0 و 1 .

(b) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية واستنتج أن  $(u_n)$  متقاربة.

(2) (a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n(-1 + u_n u_{n-1}) = u_{n-1} - u_n$

(b) استنتج  $\lim u_n$

**تمرين 16** نعتبر المتتاليتين  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  و  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفتين بما يلي :

$$(a < b) \begin{cases} u_0 = a, v_0 = b \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$$

(1) (a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < u_n < v_n$  .

(b) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تزايدية و  $(v_n)$  تناقصية .

(c) استنتج أن  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتان .

(2) نضع  $w_n = v_n - u_n$  و  $t_n = 3u_n + 8v_n$  .

(a) بين أن المتتالية  $(w_n)$  هندسية و  $(t_n)$  ثابتة

(b) احسب  $u_n$  و  $v_n$  بدلالة  $n$  . ثم احسب  $\lim u_n$  و  $\lim v_n$

**تمرين 17** نعتبر المتتاليات  $(u_n)$  و  $(v_n)$  و  $(w_n)$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} v_n = u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ w_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \end{cases} \quad \begin{cases} u_0 = 20 ; u_1 = 6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{20}u_n + \frac{1}{20}u_{n-1} \end{cases}$$

(1) بين أن  $(v_n)$  و  $(w_n)$  متتاليتين هندسيتين.

(2) احسب  $w_n ; v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  . واحسب  $\lim u_n$  .

(3) احسب  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  بدلالة  $u_n$  واستنتج  $\lim S_n$  .

**تمرين 18** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي:  $u_0 = 1$  و  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \sqrt{u_n} + 2)$ 

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n < 4$  .

(2) ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  .

(3) (a) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 < 4 - u_{n+1} \leq \frac{3}{4}(4 - u_n)$  .

(b) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة واحسب  $\lim u_n$  .

**تمرين 19** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{5}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + n^2) \end{cases}$$

و نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة بما يلي :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n - \left(\frac{n^2 - 3n + 3}{2}\right)$

(a) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية حدد أساسها وحدها الأول .

(b) احسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  .

**تمرين 20** نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{3+2u_n} \end{cases}$$

(1) بين أن  $(u_n)$  موجبة وتناقصية .

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة ب :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$

(a) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية ، حدد أساسها وحدها الأول .

(b) احسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  واستنتج  $\lim u_n$  .

(3) احسب بدلالة  $n$   $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{u_k}$  .

**تمرين 21** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 12} \end{cases}$$

ونعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة ب :  $v_n = u_n^2 - 4$

(1) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .

(2) احسب  $v_n$  ثم  $u_n$  بدلالة  $n$  واستنتج  $\lim u_n$  .

(3) أحسب  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  بدلالة  $n$  .

**تمرين 22** نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases}$$

(1) بين أن  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 < u_n \leq 2$  .

(2) (a) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية .

(b) بين أن  $(u_n)$  متقاربة ثم أحسب  $\lim u_n$  .

(3) (a) بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{2}(u_n - 1)$  .

(b) استنتج بطريقة أخرى أن  $(u_n)$  متقاربة ثم أحسب  $\lim u_n$

**تمرين 23** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{x^2 + 4}{2x}$$

(1) بين أن  $f([2,3]) \subset [2,3]$

(2) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 4}{2u_n} \end{cases}$$

(a) بين أن المتتالية  $(u_n)$  مصغرة بالعدد 2 .

(b) بين أن المتتالية  $(u_n)$  تناقصية .

(c) بين أن  $(u_n)$  متقاربة ثم أحسب  $\lim u_n$  .

**تمرين 24** نعتبر الدالة  $f$  المعرفة بما يلي :

$$f(x) = \frac{6x}{x^3 + 4}$$

(1) حدد مجموعة تعريف الدالة  $f$  .

(2) بين أن  $f$  تقابل من  $[0, \sqrt[3]{2}]$  نحو مجال يجب تحديده .

(3) نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

(a) بين أن :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : 1 \leq u_n < \sqrt[3]{2}$  .

(b) بين أن  $(u_n)$  تزايدية واستنتج أنها مقاربة واحسب  $\lim u_n$  .

**تمرين 25**نعتبر المتتالية  $(u_n)_{n \geq 0}$  المعرفة بما يلي

$$\cdot \quad v_n = u_{n+1} - u_n \quad \text{ونضع} \quad \begin{cases} u_0 = 0 & ; & u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{3}{2}u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n \end{cases}$$

(1) بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية وحدد أساسها وحدها الأول .(2) عبر عن  $v_n$  ثم عن  $u_n$  بدلالة  $n$  .(3) أحسب  $\lim u_n$  .(4) أحسب  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$  بدلالة  $n$  .