المتتاليات العددية

I) عموميات.

1) تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق U من جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$:

$$U : I \to \mathbb{R}$$
$$n \to u(n)$$

2) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$:

a) مكبورة إذا وفقط إذا وجد عدد M بحيث $(\forall n\in I)\ U_n \le M$.

b) مصغورة إذا وفقط إذا وجد عدد m بحيث $(\forall n\in I)\ U_n \ge m$.

c) محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني.

إذا وجد عددين m و M بحيث $(\forall n\in I) : m \le u_n \le M$.

ملاحظة:

تكون $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وجد $k \ge 0$ بحيث $(\forall n\in I) : |U_n| \le k$

3) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) تزايدية إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n \le U_{n+1}$.

b) تزايدية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n \langle U_{n+1}$.

c) تناقصية إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n \ge U_{n+1}$.

d) تناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n \rangle U_{n+1}$.

e) ثابتة إذا وفقط إذا كان $(\forall n\in \mathbb{N})\ \ U_n = U_{n+1}$.

ملاحظات:

1) إذا كانت (U_n) تزايدية فإن $p\langle n \Rightarrow u_p \le u_n$.

2) إذا كانت (U_n) تناقصية فإن $p\langle n \Rightarrow u_p \ge u_n$.

3) من أجل دراسة رتابة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة $u_{n+1} - u_n$.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \ge 0$ فإن (U_n) تزايدية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \rangle 0$ فإن (U_n) تزايدية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \le 0$ فإن (U_n) تناقصية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \langle 0$ فإن (U_n) تناقصية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (U_n) ثابتة.

II) المتتالية الحسابية

1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$حسابية إذا وفقط وجد عدد حقيقي r

بحيث $(\forall n\in \mathbb{N})\ \boxed{U_{n+1} = U_n + r}$

r يسمى أساس المتتالية.

ملاحظات:

a) تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا وفقط إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن (U_n) حسابية نقوم بحساب $u_{n+1} - u_n$

ونجد $u_{n+1} - u_n = cte$ وتكون الثابتة هي الأساس.

c) تكون الأعداد و و في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة المتتالية حسابية إذا كان $a + c = 2b$ يعني $\frac{a+b}{2} = b$.

2) الحد العام.

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا $(\forall n\in \mathbb{N})\ \boxed{U_n = U_0 + nr}$

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو :

$.U_n = U_1 + (n-1)r$

2) إذا كان الحد الأول هو u_2 فإن الحد العام هو :

$.U_n = U_2 + (n-2)r$

3) بصفة عامة: إذا كان U_n وU_p حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن $\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$

(ترتيب n وp غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

1) $.u_1 + u_2 + \ldots.+ u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$

2) $.u_0 + u_1 + \ldots.+ u_{n-1} = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$

3) بصفة عامة

$$\boxed{.u_p + u_{p+1} + \ldots.+ u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}}$$

III) المتتاليات الهندسية.

1) **تعريف:**

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q

بحيث: $(\forall n\in \mathbb{N})\ \boxed{U_{n+1} = q.U_n}$

العدد q يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

a) تكون متتالية (حدودها غير منعدمة) هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن المتتالية (U_n) هندسية يستحسن حساب U_{n+1} بدلالة U_n ونجد $u_{n+1} = q\cdot u_n$.

c) تكون الأعداد aوbوc في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $ac = b^2$.

2) الحد العام:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو $u_n = u_1 \cdot q^{n-p}$

2) بصفة عامة: إذا كان u_n و u_p حدين من متتالية هندسية أساسها q فإن $\boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$

(ترتيب n و p غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0.

مع $(q \neq 1)$.

$$\boxed{S = U_0 + U_1 + ... + U_n = U_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

u_0: الحد الأول للمجموع S.

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S.

ملاحظة:

1) إذا كان $q=1$ فإن $S = u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)u_0$

2) $q \neq 1$: $u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = u_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

$$u_1 + u_2 + ... + u_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

بصفة عامة

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

IV) نهاية متتالية.

1) $\lim q^n$

$$\boxed{\lim q^n = \begin{cases} 0 & ; \quad -1 < q < 1 \\ 1 & ; \quad q = 1 \\ +\infty & ; \quad q > 1 \\ \text{غير موجودة} & q \leq -1 \end{cases}}$$

2) مصادق التقارب.

a) لتكن (U_n) و (V_n) بحيث $|U_n - l| \leq V_n$ انطلاقا من صف ما.

$$\lim V_n = 0 \Rightarrow \lim U_n = l$$

b) لتكن (U_n) و (V_n) بحيث $U_n \leq V_n$ انطلاقا من صف ما

$\lim U_n = +\infty \Rightarrow \lim V_n = +\infty$ و $\lim V_n = -\infty \Rightarrow \lim U_n = -\infty$

c) لتكن (U_n) و (V_n) و (W_n) بحيث $V_n \leq U_n \leq W_n$ انطلاقا من صف ما.

$$\lim V_n = \lim W_n = l \Rightarrow \lim U_n = l$$

3) نقول إن متتالية (U_n) متقاربة إذا كانت نهايتها عدد حقيقي.
ونقول إنها متباعدة في الحالات الأخرى.

4) التقارب والترتيب.

a) لتكن (U_n) و (V_n) متتاليتين بحيث $U_n \leq V_n$ (أو $U_n < V_n$) انطلاقا من صف ما إذا كانت (U_n) و (V_n) متقاربتين فإن $\lim U_n \leq \lim V_n$.

b) كل متتالية تزايدية ومكبورة متقاربة.

c) كل متتالية تناقصية ومصغورة متقاربة.

5) المتتاليات الترجعية $U_{n+1} = f(U_n)$

لتكن f دالة معرفة على I ونعتبر المتتالية $\begin{cases} U_0 \in I \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

*) إذا كانت $f(I) \subset I$ فإن المتتالية معرفة.

*) إذا كانت f متصلة على I و (U_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق $f(l) = l$