الهندسة الفضائية — 2ع ت

نعتبر الفضاء منسوبا إلى م م م م $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1.الجداء السلمي لمتجهتين :

a.الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

إذا كان $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

فإن : $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

نتيجة : $\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}.\vec{v}=0$

b.منظم متجهة :

منظم متجهة $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ هو العدد الحقيقي الموجب :

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

c.المسافة بين نقطتين :

المسافة بين نقطتين A و B هي :

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

d.متجهة منظمية على مستوى :

نسمي متجهة منظمية على مستوى P ، كل متجهة غير منعدمة اتجاهها عمودي على المستوى P .

نتيجة:

متجهة منظمية على مستوى معرف بمعادلة $ax+by+cz+d=0$ هي $\vec{n}(a,b,c)$.

ملاحظة:

. كل مستقيم عمودي على مستوى يكون موجها بمنظمية على هذا المستوى .

. تمثيل بارامتري للمستقيم المار من نقطة Ω والعمودي على المستوى P المعرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$ هو :

$$\begin{cases} x=x_\Omega+at \\ y=y_\Omega+bt \\ z=z_\Omega+ct \end{cases} \quad (t\in R)$$

e.تحديد معادلة ديكارتية لمستوى مار بنقطة ومتجهة منظمية عليه :

لتكن A نقطة و $\vec{n}$ متجهة غير منعدمة .

يوجد مستوى وحيد P مار من A و $\vec{n}$ منظمية عليه ولدينا :

$$M\in P \iff \vec{n}.\vec{AM}=0$$

f.تحديد مثلوث إحداثيات المسقط العمودي لنقطة على مستوى :

مسقط نقطة Ω على مستوى P هونقطة تقاطع P مع المسقيم (Δ) المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى P . ويتم تحديد مثلوث إحداثياتها بحل نظمة مكونة من تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

7.الفلكة :

a.تعريـــــف :

لتكن Ω نقطة و r عددا حقيقيا موجبا قطعا.

مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M=r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r ونرمزلها بالرمز : $S(\Omega,r)$.

ولدينا : $M\in S \iff \Omega M=r$

b.معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركز وشعاع :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a,b;c)$ وشعاعها r هي

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

c.معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن S فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة في الفضاء .

$$M\in S \iff \vec{AM}\,.\,\vec{BM}=0$$

$$(x-x_A)(x-x_B)+(y-y_A)(y-y_B)+(z-z_A)(z-z_B)=0$$

d.دراسة E مجموعة النقط التي تحقق : $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$

باستعمال المتساوية $x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}$ نجد أن :

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

تكافئ

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\alpha$$

مع $\alpha=\frac{a^2+b^2+c^2}{4}-d$

نفصل بين 3 حالات :

.إذا كان $\alpha\prec 0$ فإن E مجموعة فارغة .

.إذا كان $\alpha=0$ فإن E هي الأحادية $\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)\right\}$.

.إذا كان $\alpha\succ 0$ فإن E فلكة مركزه $\Omega\left(-\frac{a}{2},\frac{-b}{2},\frac{-c}{2}\right)$ وشعاعها $\sqrt{\alpha}$

e.الوضع النسبي لفلكة ومستقيم :

لتكن $S(\Omega,r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (D) مستقيما في الفضاء

ليكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (D)

نضع : $d=d(\Omega,(D))$

. إذا كان $d\succ r$ فإن الفلكة والمستقيم لا يتقاطعان

نقول إن المستقيم (D) خارج الفلكة $S(\Omega,r)$

. إذا كان $d=r$ فإن المستقيم مماس للفلكة في النقطة H،يتم تحديد مثلوث إحداثياتها بحل نظمة مكونة من تمثيل بارامتري للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

الهندسة الفضائية

2ع ت

. إذا كان $d \prec r$ فإنه يكون للفلكة والمستقيم نقطتان مشتركتان ،يتم تحديد مثلوثي إحداثيتهما بحل نظمة مكونة من تمثيل بارامتري للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

نقول إن المستقيم يخترق الفلكة

f.الوضع النسبي لفلكة ومستوى :

لتكن $S(\Omega,r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (P) مستوى من الفضاء معرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$.

ليكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P) .

نضع : $d=(\Omega,(P))=\dfrac{|ax_\Omega+by_\Omega+cz_\Omega+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

.إذا كان $d \succ r$ فإنه لا توجد نقطة مشتركة بين $S(\Omega,r)$ و (P) .

.إذا كان $d=r$ فإن ل $S(\Omega,r)$ و (P) نقطة وحيدة مشتركة وهي H

نقول إن المستوى (P) مماس للفلكة $S(\Omega,r)$ في H

.إذا كان $d \prec r$ فإن تقاطع $S(\Omega,r)$ و (P) هو الدائرة التي مركزها H وشعاعها $r'=\sqrt{r^2-d^2}$

ملحوظة 1: إذا كان $d=0$ أي $\Omega\in(P)$ فإن (P) يقطع $S(\Omega,r)$ وفق دائرة كبرى مركزها Ω وشعاعها r .

ملحوظة 2: يتم تحديد مثلوث إحداثيات النقطة H بحل نظمة مكونة من معادلة ديكارتية للمستوى و تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ)، المار من Ω والعمودي على المستوى .

g.الجداء المتجهي :

a.الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

إذا كان $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$

فإن : $\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} y & z\\ y' & z'\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} x & z\\ x' & z'\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} x & y\\ x' & y'\end{vmatrix}\vec{k}$

b.استقامية متجهتين

$\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$ يكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان

c.استقامية ثلاث نقط

A و B و C مستقيمية يكافئ $\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\vec{0}$

نتيجة :منظمية على مستوى (ABC)

لتكن A و B و C نقطا غير مستقيمية .

المتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)

ولدينا التكافؤ التالي : $\vec{AM}.(\vec{AB}\wedge\vec{AC})=0 \Leftrightarrow M\in(ABC)$

الذي نستنتج منه معادلة ديكارتية للمستوى (ABC).

ملاحظة :

كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجها بالمتجهة $\vec{AB}\wedge\vec{AC}$.

d.مساحة مثلث:

مساحة مثلث ABC هي : $S_{ABC}=\dfrac{\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|}{2}$

e. مساحة متوازي الأضلاع:

مساحة متوازي الأضلاع ABCD هي : $S_{ABCD}=\|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\|$

d.مسافة نقطة عن مستقيم

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة A و موجه بمتجهة $\vec{u}$ هي

$$d(\Omega\,;D(A,\vec{u}))=\frac{\|\vec{\Omega A}\wedge\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

e.توازي وتعامد مستويين:

نعتبر مستويين $(P): ax+by+cz+d=0$

$(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$

المتجهة $\vec{n}(a,b,c)$ منظمية على (P)

المتجهة $\vec{n}(a',b',c')$ منظمية على (P')

. $(P)//(P')$ يكافئ $\vec{n}\wedge\vec{n'}=\vec{0}$ (جداء متجهي)

. $(P)\perp(P')$ يكافئ $\vec{n}.\vec{n'}=0$ (جداء سلمي)

f.تقاطع مستويين :

نعتبر مستويين متقاطعين (P) و (P').

لتكن $\vec{n}$ متجهة منظمية على (P) و $\vec{n'}$ متجهة منظمية على (P')

تقاطع المستويين (P) و (P') هو مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{n}\wedge\vec{n'}$