السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	الدوال اللوغارتمية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 : لنحدد مجموعة تعريف الدوال التالية :

$f(x)=\ln(x^2+2x)$	$Df=\{x\in IR\ /\ x^2+2x>0\}=\{x\in IR\ /\ x(x+2)>0\}=]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$
$g(x)=\ln(x^2-2x+5)$	$Dg=\{x\in IR\ /\ x^2-2x+5>0\}=IR$ لأن : $\Delta=4-20<0$
$h(x)=\ln(5-x)+\ln(x^2-3)$	$Dh=\{x\in IR\ /\ 5-x>0\ \ et\ \ x^2-3>0\}=\{x\in IR\ /\ 5-x>0\ \ et\ \ x^2>3\}$ $=\{x\in IR\ /\ x<5\ \ et\ \ (x>\sqrt{3}\ \ ou\ \ x<-\sqrt{3})\}$ $=\{x\in IR\ /(x<5\ \ et\ x>\sqrt{3})\ \ ou\ \ (x<5\ \ et\ \ x<-\sqrt{3})\}$ $Dh=]\sqrt{3};5[\cup]-\infty;-\sqrt{3}[=]-\infty;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3};5[$
$p(x)=\dfrac{3}{1-\ln(x)}$	$Dp=\{x\in IR\ /\ \ x>0\ et\ \ 1-\ln x\neq 0\}=\{x\in IR\ /\ \ x>0\ et\ \ \ln x\neq 1\}$ $=\{x\in IR\ /\ \ x>0\ et\ \ \ln x\neq\ln e\}=\{x\in IR\ /\ \ x>0\ et\ \ x\neq e\}$ $Dp=]0;e[\cup]e;+\infty[$

تمرين 2 :

$\ln(x^2+2x)=0$	مجموعة صلاحية المعادلة هي : $D=]-\infty;-2[\cup]0;+\infty[$ الآن : $\ln(x^2+2x)=0\ \Leftrightarrow\ \ln(x^2+2x)=\ln 1\ \Leftrightarrow\ x^2+2x=1\ \Leftrightarrow\ x^2+2x-1=0$ بعد حساب المحدد ة نجد: $\Delta=4+4=8\ \Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{-2+\sqrt{8}}{2}=\dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}\approx 0{,}41\in D\\ x_2=\dfrac{-2-\sqrt{8}}{2}=\dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}\approx -2{,}41\in D\end{cases}$ إذن : $\boxed{S=\{-1+\sqrt{2}\ \ ;\ -1-\sqrt{2}\}}$ قبل إنجاز المعادلات أو المتراجحات يجب تحديد مجموعة صلاحية المعادلة وبعد إيجاد الحلول يجب التحقق من الحلول التي تنتمي لمجموعة الصلاحية ، طريقة الجواب أعلاه تمثل اختصارا لهذه الطريقة باستعمال الرموز الرياضية ، و قد استعملنا خلالها نتيجة 1 من التمرين السابق. أخيرا استعملنا تقريبا للحلول لنستطيع أن نحدد الحلول التي تنتمي لمجموعة لصلاحية المعادلة $]-\infty,-2[\cup]0,+\infty[$ (وجدنا كلا الحلين ينتمي لمجموعة الصلاحية)
$\ln(x^2-3)=\ln(2x)$	$D=\{x\in IR/x^2-3>0\ \ et\ \ 2x>0\}=\{x\in IR/x^2>3\ \ et\ \ x>0\}$ $D=\{x\in IR/x>\sqrt{3}\}=]\sqrt{3};+\infty[$ $\ln(x^2-3)=\ln(2x)\Leftrightarrow x^2-3=2x\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$ $\Delta=4+12=16\ \Rightarrow\begin{cases}x_1=\dfrac{2+4}{2}=3\in D\\ x_2=\dfrac{2-4}{2}=-1\notin D\end{cases}$ بالتالي : $\boxed{S=\{3\}}$
$\ln(x^2+1)=1$	$D=\{x\in IR/x^2+3>0\}=IR$ $\ln(x^2+1)=1\Leftrightarrow\ln(x^2+1)=\ln(e)\Leftrightarrow x^2+1=e$ $\ln(x^2+1)=1\Leftrightarrow x^2=e-1$ بالتالي : $\boxed{S=\{\sqrt{e-1}\ ,\ -\sqrt{e-1}\}}$ $\ln(x^2+1)=1\Leftrightarrow x=\sqrt{e-1}\ ou\ x=-\sqrt{e-1}$

2

$$D=\{x\in IR/\,x+1>0\ \ et\ \ 2x>0\}=\{x\in IR/\,x>-1\ \ et\ \ x>0\}=]0;+\infty[$$

$$\ln(x+1)\geq\ln(2x)\Leftrightarrow x+1\geq 2x\Leftrightarrow x-2x\geq -1\Leftrightarrow -x\geq -1\Leftrightarrow x\leq 1$$

بالتالي : $\boxed{S=]-\infty;1]\cap]0;+\infty[=]0,1]}$

تمرين 3 :

1

$$\ln\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)=\ln\left(\sqrt{\sqrt{2}+1}\times\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)=\ln\left(\sqrt{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}\right)=\ln\left(\sqrt{2-1}\right)=\ln(1)=0$$

استعملنا الخاصية : $\ln(x)+\ln(y)=\ln(xy)$

2

$$\ln(\sqrt{6})=\frac{1}{2}\ln(6)=\frac{1}{2}(\ln(2)+\ln(3))\approx\frac{0{,}7+1{,}1}{2}\approx 0{,}9$$

$$\ln\left(\frac{16}{9}\right)=\ln(16)-\ln(9)=\ln(2^4)-\ln(3^2)=4\ln(2)-2\ln(3)\approx 4\times 0{,}7-2\times 1{,}1\approx 2{,}8-2{,}2\approx 0{,}6$$

$$\ln(\sqrt[3]{12})=\frac{1}{3}\ln(12)=\frac{1}{3}\ln(2^2\times 3)=\frac{2\ln(2)+\ln(3)}{3}\approx\frac{1{,}4+1{,}1}{3}\approx\frac{2{,}5}{3}\approx 0{,}8$$

استعملنا الخاصيات : $\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln(x)-\ln(y)$ و $\ln(x^r)=r\ln(x)$ و $\ln(\sqrt[n]{x})=\frac{1}{n}\ln(x)$

تمرين 4 :

$\boxed{f(x)=\ln(2x+1)}$

$$f'(x)=\frac{(2x+1)'}{2x+1}$$

$$f'(x)=\frac{2}{2x+1}$$

$\boxed{f(x)=\ln(7-x^2)}$

$$f'(x)=\frac{(7-x^2)'}{7-x^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x}{7-x^2}$$

$\boxed{f(x)=\ln(1+\ln(x))}$

$$f'(x)=\frac{(1+\ln(x))'}{1+\ln(x)}=\frac{\frac{1}{x}}{1+\ln(x)}$$

$\boxed{f(x)=\ln^3(x)}$

$$f'(x)=3(\ln^2(x))(\ln(x))'$$

$$f'(x)=3\ln^2(x)\times\frac{1}{x}$$

$\boxed{f(x)=x\ln(x)+\frac{\ln(\sqrt{x})}{x}}$

$$f'(x)=(x\ln(x))'+\left(\frac{1}{2}\frac{\ln(x)}{x}\right)'$$

$$f'(x)=1\times\ln(x)+x\times\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{x}\times x-1\times\ln(x)}{x^2}$$

$$f'(x)=\ln(x)+1+\frac{1-\ln(x)}{2x^2}$$

من المستحسن استعمال خصائص دالة اللوغاريتم قبل الاشتقاق

للتذكير : $\ln(u(x))'=\frac{(u(x))'}{u(x)}$

تمرين 5 :

1

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(2x)+\frac{1}{\ln(x)}=+\infty$$

$$(+\infty+0\rightarrow+\infty)$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x)}{x}+\ln\left(\frac{x^2+5}{x^2+1}\right)=0+\ln(1)=0$$

لأن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2+5}{x^2+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(x)-x=\lim_{x\mapsto+\infty}x\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x)}{x^2}+\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}=0+0=0$$

لأن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}-1=0-1=-1$

لأن: لكل $r>0$ $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x^r}=0$ ، $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x+2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2\ln(x)}{x+2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2x}{x+2}\times\frac{\ln(x)}{x}=2\times0=0$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\ln^2(x)-x=\lim_{x\mapsto+\infty}x\left(\frac{\ln^2(x)}{x}-1\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}x\left(\left[\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\right]^2-1\right)=-\infty$$

2

$$\lim_{x\mapsto0^+}\ln(2x)+\frac{1}{\ln(x)}=-\infty\ (-\infty+0)$$

$\lim\limits_{x\mapsto0^+}\dfrac{\ln(x)}{x}+\ln\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+1}\right)=-\infty$ ، لأن : $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\ln\left(\dfrac{x^2+5}{x^2+1}\right)=\ln(5)$ و $\lim\limits_{x\mapsto0^+}\dfrac{\ln(x)}{x}=-\infty$ $\left(\dfrac{-\infty}{0^+}\to-\infty\right)$

$\lim\limits_{x\mapsto0^+}x\ln(x)-x=0-0=0$ باستعمال النهاية الخاصة : $\lim\limits_{x\mapsto0^+}x\ln(x)=0$

$$\lim_{x\mapsto0^+}x^2\ln(x)+\sqrt{x}\ln(x)=\lim_{x\mapsto0^+}x\times[x\ln(x)]+\sqrt{x}\ln\left(\sqrt{x}^2\right)=\lim_{x\mapsto0^+}x\times[x\ln(x)]+2\sqrt{x}\ln(\sqrt{x})=0\times0+2\times0=0$$

$$\lim_{x\mapsto2}\frac{\ln(x)-\ln(2)}{x-2}=\ln'(2)=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\mapsto0^+}\ln(x)\ln(x+1)=\lim_{x\mapsto0^+}x\ln(x)\frac{\ln(x+1)}{x}=0\times1=0$$

تمرين 6 :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{\ln(x)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}2+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{\ln(x)}=2\qquad\left(\frac{0}{+\infty}\to0\right)$$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\ln(2x+3)-\ln(x+5)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\ln\left(\dfrac{2x+3}{x+5}\right)=\ln(2)$ (لأن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2x+3}{x+5}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2x}{x}=2$)

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(2x^3+2x+1)-3\ln(x)=\lim_{x\mapsto+\infty}\ln(2x^3+2x+1)-\ln(x^3)=\lim_{x\mapsto+\infty}\ln\left(\frac{2x^3+2x+1}{x^3}\right)=\ln(2)$$

(لأن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2x^3+2x+1}{x^3}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{2x^3}{x^3}=2$)

$$\lim_{x\mapsto1}\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\mapsto1}\frac{\ln(x)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\times(\sqrt{x}+1)=\lim_{x\mapsto1}\frac{\ln(x)}{x-1}\times(\sqrt{x}+1)=1\times2=2$$

$$\lim_{\substack{x\mapsto0\\x>0}}x\ln(x^3+x)=\lim_{\substack{x\mapsto0\\x>0}}x\ln\left(x(x^2+1)\right)=\lim_{\substack{x\mapsto0\\x>0}}x\ln(x)+x\ln(x^2+1)=0+0\times\ln(1)=0$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2\ln(x)}{3+\ln(x)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2\ln(x)}{\ln(x)\left(\frac{3}{\ln(x)}+1\right)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{2}{\frac{3}{\ln(x)}+1}=\frac{2}{0+1}=2$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{\ln(x+1)}-\sqrt{\ln(x)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x)}{\sqrt{\ln(x+1)}+\sqrt{\ln(x)}}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\sqrt{\ln(x+1)}+\sqrt{\ln(x)}}=0\quad\left(\frac{\ln(1)}{+\infty}=\frac{0}{+\infty}=0\right)$$

لاحظ من خلال هذه الأمثلة أنه لا توجد طريقة محددة للتعامل مع نهايات دالة اللوغاريتم، عليك محاولة استثمار الأفكار من كل نهاية