

### التعريف الأول :

1. أ- ليكن  $x \in \mathbb{R} - \{-1\}$  لدينا :  $2x + 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x+1)(x+1)+1}{x+1} = \frac{2x^2+2x+x+1+1}{x+1} = \frac{2x^2+3x+2}{x+1}$

ب- لدينا :  $\int_0^1 \frac{2x^2+3x+2}{x+1} dx = \int_0^1 2x+1 + \frac{1}{x+1} dx = \left[ x^2+x + \ln(|x+1|) \right]_0^1 = \boxed{2+\ln 2}$

2. باستعمال المكاملة بالأجزاء ، نجد :  $J = \int_0^1 x e^{-x} dx = \int_0^1 x (-e^{-x})' dx = \left[ -x e^{-x} \right]_0^1 - \int_0^1 x' (e^{-x}) dx$

$J = -e^{-1} - \int_0^1 -e^{-x} dx = -e^{-1} - \left[ e^{-x} \right]_0^1 = -e^{-1} - (e^{-1} - 1) = \boxed{1 - \frac{2}{e}}$

3. لنحدد إشارة  $\ln x$  على المجال  $\left[ \frac{1}{e}, e \right]$  لدينا :

$x$	0	$\frac{1}{e}$	1	$e$	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+	

باستعمال علاقة شال ، نحصل على ما يلي :

$$K = \int_{\frac{1}{e}}^e \frac{1}{x} |\ln x| dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} |\ln(x)| dx + \int_1^e \frac{1}{x} |\ln(x)| dx = - \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{1}{x} \ln(x) dx + \int_1^e \frac{1}{x} \ln(x) dx$$

$$= - \int_{\frac{1}{e}}^1 (\ln(x))' \ln(x) dx + \int_1^e (\ln(x))' \ln(x) dx$$

$$K = - \left[ \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \left[ \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = - \left( 0 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - 0 \right) = \boxed{1}$$

### التعريف الثاني :

لكل  $z$  من  $\mathbb{C}$  ، نضع :  $P(z) = z^3 - (8+3i)z^2 + (25+24i)z - 75i$

1. لنحل في المجموعة  $\mathbb{C}$  المعادلة التالية :  $(E) : z^2 - 8z + 25 = 0$

لدينا :  $\Delta' = b'^2 - ac = (-4)^2 - 1 \times 25 = 16 - 25 = -9 = (3i)^2$

$$z_2 = \frac{-b' - i\sqrt{-\Delta'}}{a} = 4 - 3i \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b' + i\sqrt{-\Delta'}}{a} = 4 + 3i$$

ومنه فإن مجموعة حلول المعادلة  $(E)$  هي :  $S = \{4 - 3i, 4 + 3i\}$

2. ليكن  $z_0 = iy$  بحيث  $y \in \mathbb{R}$  ، حلا تخيليا صرفا للمعادلة  $P(z) = 0$  . إذن :

$$\begin{aligned}
P(z_0) = 0 &\Leftrightarrow z_0^3 - (8+3i)z_0^2 + (25+24i)z_0 - 75i = 0 \\
&\Leftrightarrow (iy)^3 - (8+3i)(iy)^2 + (25+24i)(iy) - 75i = 0 \\
&\Leftrightarrow (8y^2 - 24y) + i(-y^3 + 3y^2 + 25y - 75) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8y^2 - 24y = 0 \\ -y^3 + 3y^2 + 25y - 75 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 8y(y-3) = 0 \\ -y^3 + 3y^2 + 25y - 75 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ أو } y = 3 \\ -y^3 + 3y^2 + 25y - 75 = 0 \end{cases} \\
P(z_0) = 0 &\Leftrightarrow \boxed{y = 3}
\end{aligned}$$

وبالتالي فإن  $z_0 = 3i$  هو حل تخيلي صرف للمعادلة  $P(z) = 0$ .

3. لدينا  $z_0 = 3i$  جذر للحدودية  $P(z)$ . إذن  $P(z)$  تقبل القسمة على  $z - 3i$ .

### القسمة الأقليدية.

### طريقة 1 :

$$\begin{array}{r|l}
P(z) = z^3 - (8+3i)z^2 + (25+24i)z - 75i & z - 3i \\
\hline
\textcircled{-} \quad z^3 - 3iz^2 & z^2 - 8z + 25 \\
\hline
\textcircled{-} \quad -8z^2 + (25+24i)z - 75i & \\
\hline
\textcircled{-} \quad -8z^2 + 24iz & \\
\hline
\textcircled{-} \quad 25z - 75i & \\
\hline
\textcircled{-} \quad 25z - 75i & \\
\hline
0 & 0
\end{array}$$

ومنه نستنتج أن :  $a = -8$  و  $b = 25$ .

### طريقة 2 : تكون حدوديتان مختصرتان متساويتين إذا وفقط إذا كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

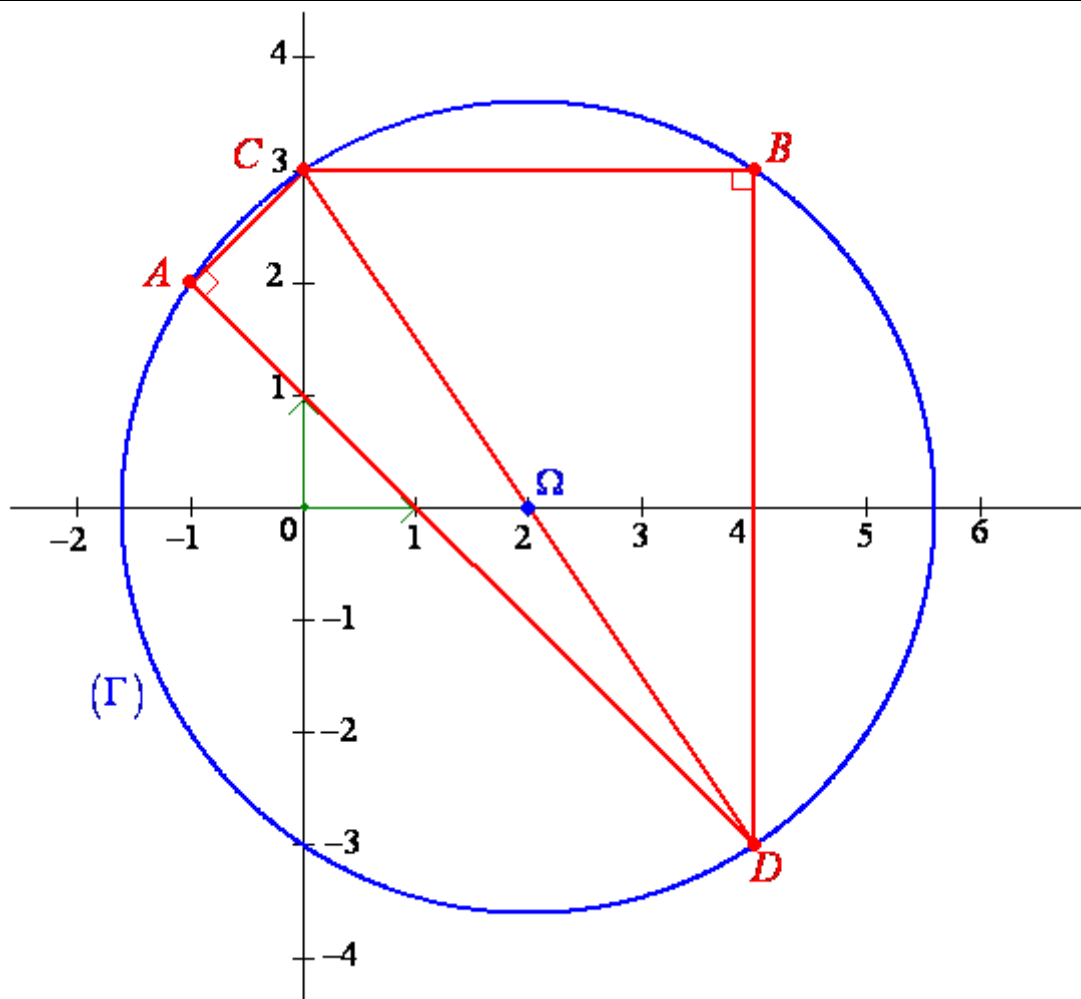
$$\begin{aligned}
P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b) &\Leftrightarrow P(z) = z^3 + az^2 + bz - 3iz^2 - 3aiz - 3bi \\
&\Leftrightarrow P(z) = z^3 + (a - 3i)z^2 + (b - 3ai)z - 3bi \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3i = -8 - 3i \\ b - 3ai = 25 + 24i \\ -3bi = -75i \end{cases}
\end{aligned}$$

$$P(z) = (z - 3i)(z^2 + az + b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -8 \\ b = 25 \end{cases}$$

4. في المستوى العقدي  $\mathcal{P}$ . المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي أحاقها على

التوالي هي:  $z_A = -1 + 2i$  و  $z_B = 4 + 3i$  و  $z_C = 3i$  و  $z_D = 4 - 3i$ .

أ- تمثيل النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  في المستوى العقدي  $\mathcal{P}$  :



$$\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{3i - (-1 + 2i)}{4 - 3i - (-1 + 2i)} = \frac{1 + i}{5 - 5i} = \frac{i(1 - i)}{5(1 - i)} = \boxed{\frac{1}{5}i}$$

ب- لدينا :

$$\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = \frac{3i - (4 + 3i)}{4 - 3i - (4 + 3i)} = \frac{-4}{-6i} = \frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i^2} = \boxed{-\frac{2}{3}i}$$

ج- لدينا :  $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A} = \frac{1}{5}i = \left[ \frac{1}{5}, \frac{\pi}{2} \right]$  . إذن :  $[2\pi]$   $\left[ \frac{\pi}{2} \right]$   $(\overline{AD}, \overline{AC})$  . ومنه فإن المثلث  $ACD$  قائم الزاوية في  $A$  .

ولدينا :  $\frac{z_C - z_B}{z_D - z_B} = -\frac{2}{3}i = \left[ \frac{2}{3}, -\frac{\pi}{2} \right]$  . إذن :  $[2\pi]$   $\left[ -\frac{\pi}{2} \right]$   $(\overline{BD}, \overline{BC})$  . ومنه فإن المثلث  $BCD$  قائم الزاوية في

النقطة  $B$  .

د- بما أن  $ACD$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  ، فإنه محاط بالدائرة  $(\Gamma)$  التي أحد أقطارها  $[CD]$  ، وبما أن  $BCD$  مثلث قائم الزاوية في  $B$  ، فإنه محاط بالدائرة التي أحد أقطارها  $[CD]$  ، أي بالدائرة  $(\Gamma)$  . وبالتالي فإن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  تنتمي إلى الدائرة  $(\Gamma)$  ، و

لدينا : مركز الدائرة  $(\Gamma)$  هو النقطة  $\Omega$  منتصف القطعة  $[CD]$  والتي لحقها :  $z_\Omega = \frac{z_C + z_D}{2} = \frac{3i + 4 - 3i}{2} = \boxed{2}$  .

شعاع الدائرة  $(\Gamma)$  هو  $R = \Omega A = |z_A - z_\Omega| = |-1 + 2i - 2| = |-3 + 2i| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \boxed{\sqrt{13}}$  .

لدينا : 5.

$$t_{\overline{AD}}(C) = E \Leftrightarrow \overline{AD} = \overline{CE}$$

$$\Leftrightarrow z_D - z_A = z_E - z_C$$

$$. z_E = z_D - z_A + z_C = 4 - 3i - (-1 + 2i) + 3i = \boxed{5 - 2i}$$

إذن :

$$\begin{cases} f(x) = \ln(1-x^3) & ; x < 0 \\ f(x) = 4x\sqrt{x} - 3x^2 & ; x \geq 0 \end{cases}$$

تكن  $f$  الدالة العددية المعرفة بما يلي :

ولیکن  $(\mathcal{C}_f)$  المنحنى الممثل للدالة  $f$  في المستوى  $(\mathcal{P})$  المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1-x^3) = \ln 1 = 0 = f(0)$  و  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4x\sqrt{x} - 3x^2 = f(0)$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$  . ومنه فإن  $f$  دالة متصلة في النقطة 0 .

ب- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x\sqrt{x} - 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 4\sqrt{x} - 3x = 0$

إذن  $f$  قابلة للإشتقاق على اليمين في 0 و  $f'_d(0) = 0$

نضع  $t = (-x)^3$  . إذن  $t \rightarrow 0^+$  . ومنه فإن :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x^3)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1+(-x)^3)}{(-x)^3} \times (-x^2) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)}{t} \times (-\sqrt[3]{t^2}) = 0$$

إذن  $f$  قابلة للإشتقاق على اليسار في 0 و  $f'_g(0) = 0$

وبما أن  $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$  ، فإن  $f$  قابلة للإشتقاق في النقطة 0 ولدينا :  $f'(0) = 0$

2. ليكن  $x \in ]-\infty, 0[$  . لدينا :  $\frac{-3x^2}{1-x^3} < 0$  . إذن  $f$  دالة **تناقصية** على المجال  $]-\infty, 0[$  .

ليكن  $x \in ]0, +\infty[$  . لدينا :  $f'(x) = (4x\sqrt{x} - 3x^2)' = 4(x'\sqrt{x} + x(\sqrt{x})') - 6x = 4(\sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}) - 6x$

$$f'(x) = 4\left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2}\right) - 6x = \sqrt{x} - 6x = 6\sqrt{x}(1-\sqrt{x}) = \frac{6\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}(1-x)$$

ومنه فإن إشارة  $f'(x)$  على المجال  $]0, +\infty[$  هي إشارة  $1-x$  ، ولدينا :

$x$	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	0	-

إذن  $f$  دالة **تناقصية** على المجال  $]1, +\infty[$  ، و **تزايدية** على المجال  $[0, 1]$  .

3. أ- لدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 4x\sqrt{x} - 3x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x}(4-3\sqrt{x}) = (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$

نضع  $t = 1-x^3$  . إذن  $t \rightarrow +\infty$  ، ومنه فإن :  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$

ب- ليكن  $x \in ]-\infty, 0[$  . لدينا :

$$3 \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\ln(1-x^{-3})}{x} = \frac{\ln((-x)^3) + \ln(1-x^{-3})}{x} = \frac{\ln(-x^3) + \ln(1-x^{-3})}{x}$$

$$= \frac{\ln(-x^3(1-x^{-3}))}{x} = \frac{\ln(1-x^3)}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

ج- نعلم أن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x\sqrt{x} - 3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(4 - 3\sqrt{x}) = -\infty$$

ولدينا :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  إذن  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل **فرعا شلجيميا**، بجوار  $+\infty$  ، **اتجاهه محور الأرتيب**.

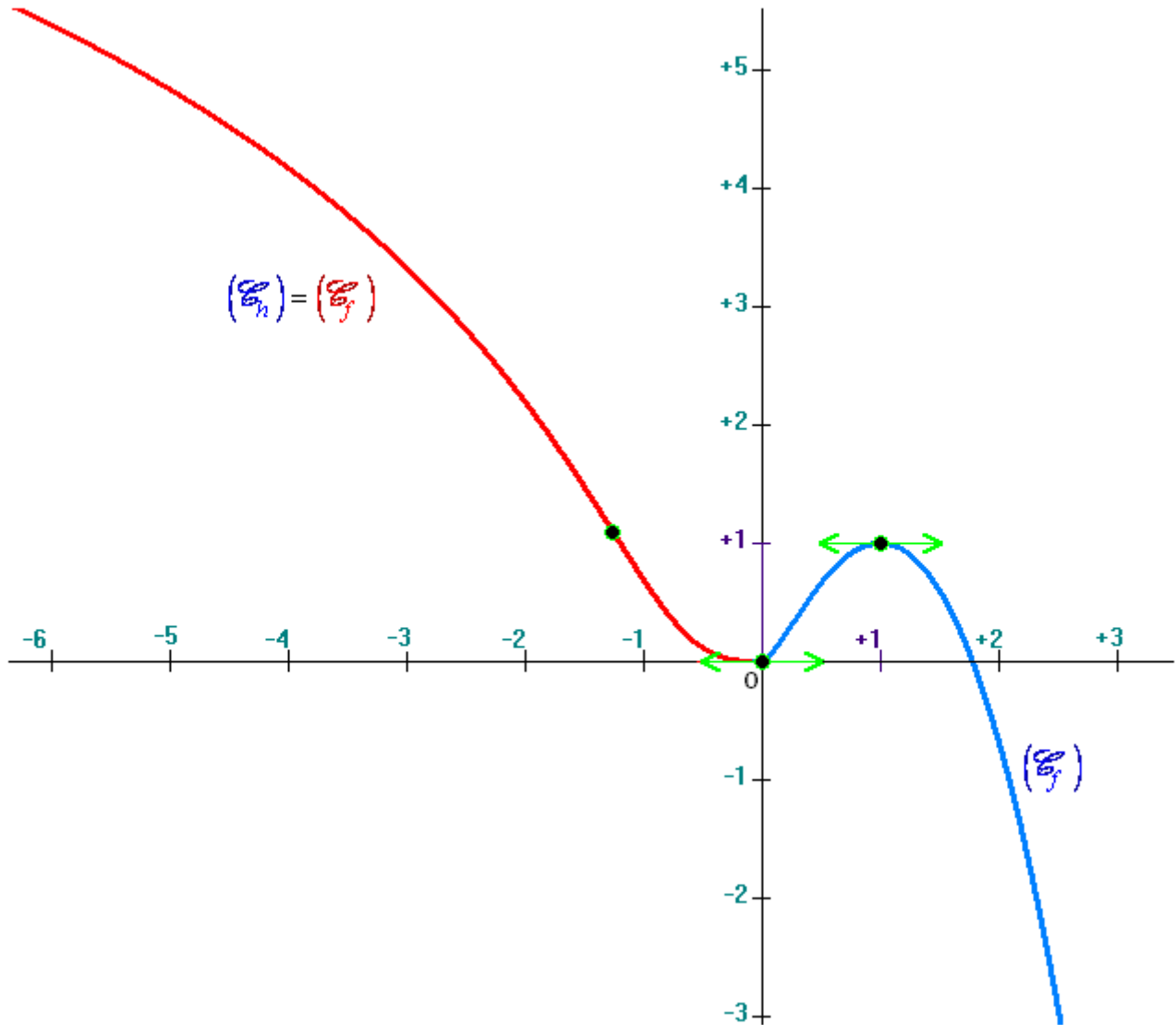
ونعلم أن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

نضع  $t = -x$  . إذن  $t \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 \frac{\ln(-x)}{x} + \frac{\ln(1-x^{-3})}{x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -3 \frac{\ln t}{t} - \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{t^3}\right)}{t} = 0$$

ومنه فإن :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  إذن  $(\mathcal{E}_f)$  يقبل **فرعا شلجيميا**، بجوار  $-\infty$  ، **اتجاهه محور الأفاصيل**.

4. إنشاء المنحنى  $(\mathcal{E}_f)$  :



5. أ- لدينا  $h$  دالة متصلة و تناقصية قطعاً على المجال  $] -\infty, 0[$  . إذن  $h$  تقبل دالة عكسية  $h^{-1}$  معرفة من المجال

$$I = ] -\infty, 0[ \quad \text{نحو المجال} \quad J = h(] -\infty, 0[) = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) \right[ = ] 0, +\infty[$$

ب- لدينا :

$$h^{-1} : ] 0, +\infty[ \rightarrow ] -\infty, 0[ \\ x \mapsto y = h^{-1}(x)$$

ليكن  $x \in ]0, +\infty[$  و  $y \in ]-\infty, 0[$  بحيث  $y = h^{-1}(x)$  ينبغي تحديده بدلالة  $x$  ؟

$$\begin{aligned}
 y = h^{-1}(x) &\Leftrightarrow h(y) = x \\
 &\Leftrightarrow \ln(1-y^3) = x \\
 &\Leftrightarrow 1-y^3 = e^x \\
 &\Leftrightarrow -y^3 = e^x - 1 \\
 &\Leftrightarrow (-y)^3 = e^x - 1 \\
 &\Leftrightarrow (-y)^3 = e^x - 1 \\
 &\Leftrightarrow -y = \sqrt[3]{e^x - 1} \quad (!) \quad y < 0 \\
 y = h^{-1}(x) &\Leftrightarrow y = -\sqrt[3]{e^x - 1}
 \end{aligned}$$

وبالتالي فإن :  $\forall x \in ]0, +\infty[ : \boxed{h^{-1}(x) = -\sqrt[3]{e^x - 1}}$

6. نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = \frac{4}{9} \\ u_{n+1} = 4u_n \sqrt{u_n} - 3u_n^2 = f(u_n) ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

أ- من أجل  $n = 0$  ، لدينا  $u_0 = \frac{4}{9}$  ، إذن :  $\frac{4}{9} \leq u_0 \leq 1$  .

ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . - نفترض أن :  $\frac{4}{9} \leq u_n \leq 1$  .

- نبين أن :  $\frac{4}{9} \leq u_{n+1} \leq 1$  .

لدينا :  $f$  تزايدية على المجال  $[\frac{4}{9}, 1]$  .

$$\frac{4}{9} \leq u_n \leq 1 \Rightarrow f\left(\frac{4}{9}\right) \leq f(u_n) \leq f(1) \Rightarrow \frac{48}{81} \leq u_{n+1} \leq 1 \Rightarrow \frac{4}{9} \leq u_{n+1} \leq 1$$

لأن :  $\frac{4}{9} \leq \frac{48}{81}$  .

وبالتالي فإن :  $\forall n \in \mathbb{N} : \boxed{\frac{4}{9} \leq u_n \leq 1}$

ب- ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . لدينا :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= 4u_n \sqrt{u_n} - 3u_n^2 - u_n = u_n (4\sqrt{u_n} - 3u_n - 1) \\
 &= u_n [3\sqrt{u_n} - 3u_n + \sqrt{u_n} - 1] = u_n [3\sqrt{u_n} (1 - \sqrt{u_n}) - (1 - \sqrt{u_n})]
 \end{aligned}$$

$$u_{n+1} - u_n = u_n (1 - \sqrt{u_n}) (3\sqrt{u_n} - 1)$$

وبما أن  $\frac{4}{9} \leq u_n \leq 1$  ، فإن :  $u_n \geq 0$  و  $1 - \sqrt{u_n} \geq 0 \Rightarrow \sqrt{u_n} \leq 1 \Rightarrow u_n \leq 1$

$$\frac{2}{3} \leq \sqrt{u_n} \leq 1 \Rightarrow 2 \leq 3\sqrt{u_n} \leq 3 \Rightarrow 1 \leq 3\sqrt{u_n} - 1 \leq 2 \quad : \text{ و }$$

إذن :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} - u_n \geq 0$  . ومنه فإن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تزايدية.

✓ من أجل  $n = 0$  ، لدينا :  $u_0 = \frac{4}{9}$  و  $u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{4}{9}\right) = \frac{48}{81}$  . إذن :  $u_1 \geq u_0$  .

✓ ليكن  $n \in \mathbb{N}$  . - نفترض أن :  $u_{n+1} \geq u_n$  .

- ونبين أن :  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$  .

نعلم أن  $f$  تزايدية على المجال  $\left[\frac{4}{9}, 1\right]$  وأن  $\frac{4}{9} \leq u_n \leq 1$  :  $\forall n \in \mathbb{N}$  .

$$\begin{aligned} u_{n+1} \geq u_n &\Rightarrow f(u_{n+1}) \geq f(u_n) \\ &\Rightarrow u_{n+2} \geq u_{n+1} \end{aligned} \quad \text{إذن :}$$

✓ وبالتالي فإن :  $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} \geq u_n$  .

و عليه فإن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تزايدية .

ج- بما أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية تزايدية ومكبورة بالعدد 1 ، فإنها متقاربة ، وبما أن :

✓  $f$  متصلة على المجال  $\left[\frac{4}{9}, 1\right]$  .

✓  $f$  متصلة وتزايدية قطعاً على المجال  $\left[\frac{4}{9}, 1\right]$  . إذن :  $\left[\frac{4}{9}, 1\right] = f\left(\left[\frac{4}{9}, 1\right]\right) = \left[\frac{48}{81}, 1\right] \subset \left[\frac{4}{9}, 1\right]$  .

✓  $u_0 = \frac{4}{9} \in \left[\frac{4}{9}, 1\right]$  .

✓  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية متقاربة نهايتها  $l$  .

فإن :  $l = f(l)$  و  $l \in \left[\frac{4}{9}, 1\right]$  .

$$f(l) = l \Leftrightarrow 4l\sqrt{l} - 3l^2 - l = 0$$

$$\Leftrightarrow l(\sqrt{l} - 1)(3\sqrt{l} - 1) = 0$$

$$f(l) = l \Leftrightarrow l = 0 \text{ أو } l = 1 \text{ أو } l = \frac{1}{9}$$

وبما أن :  $l \in \left[\frac{4}{9}, 1\right]$  ، فإن :  $l = 1$  . وبالتالي فإن :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1}$$

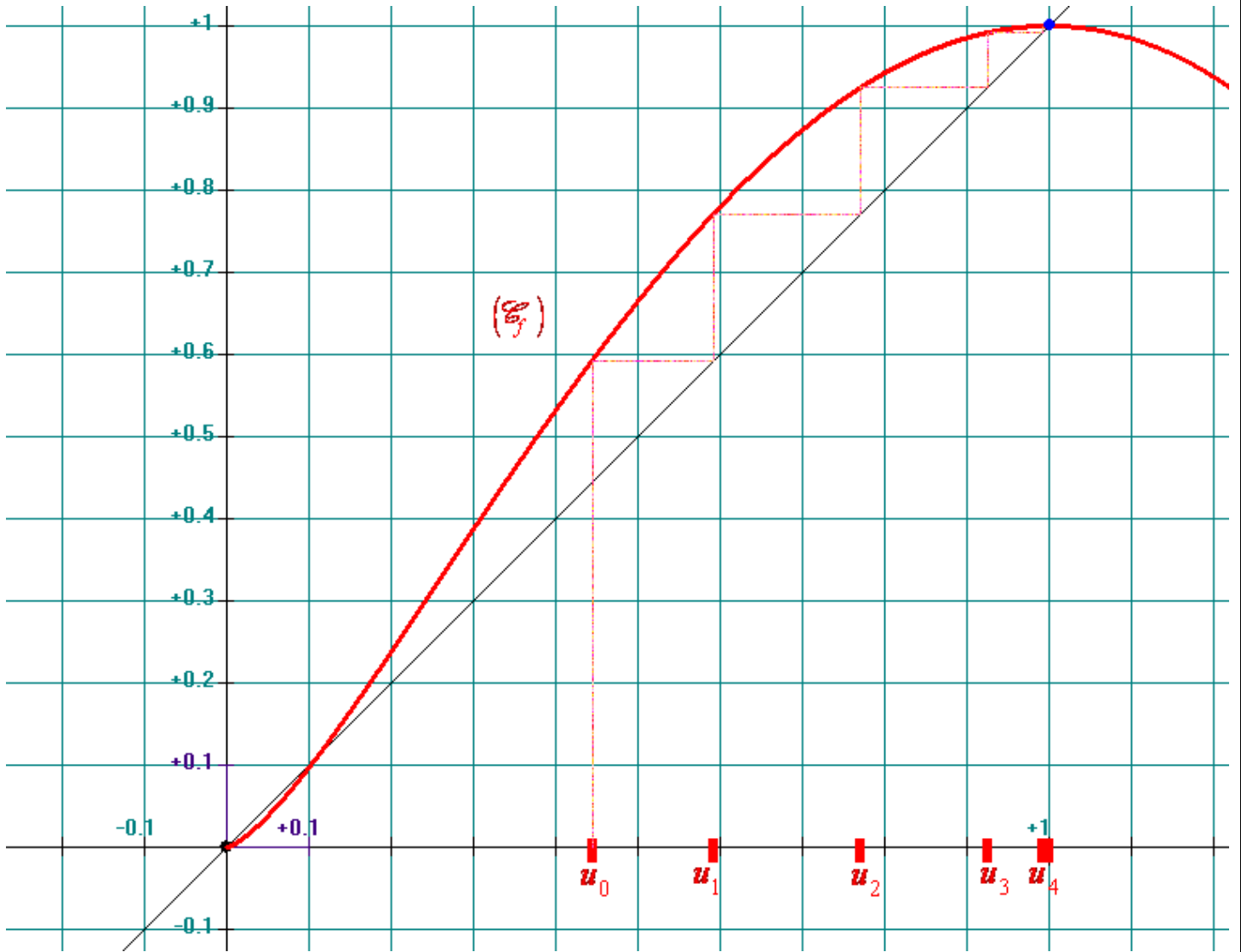
Archimède II plus باستعمال البرنامج

تمثيل حدود المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  على محور الأفاصيل :

Maple 8

باستعمال البرنامج

حساب الحدود الثمانية الأولى للمتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  إلى  $10^{-39}$  :



```
> f:=x->4*x*sqrt(x)-3*x^2;
```

$$f := x \rightarrow 4x\sqrt{x} - 3x^2$$

```
> u||0:=4/9;
```

$$u_0 := \frac{4}{9}$$

```
> for n from 0 to 7 do u||(n+1):=evalf ( f(u||n) ,40) end do;
```

```
>
```

```
u1 := .5925925925925925925925925925925926
```

```
u2 := .771214019496430399765540178705775003857
```

```
u3 := .924770145160219732615854802614175415392
```

```
u4 := .991620265837260128814475447447728689792
```

```
u5 := .999894817653372624921308101428513339064
```

```
u6 := .99999983405301865062068449925712595782
```

```
u7 := .9999999999999999586923991857909924819865
```

```
u8 := .9999999999999999999999999999744052317
```