تمارين محلولة:الأعداد العقدية" الجزء الثاني"
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة والأرض والعلوم الزراعية

الأستاذ: نجيب عثماني

أكاديمية الجهة الشرقية

تمرين1: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية: 1) $z^2=5$ 2) $z^2=-3$ 3) $z^2=-4$

أجوبة : 1) $z^2=5$ يعني : $z=\sqrt{5}$ و $z=-\sqrt{5}$

ومنه : $S=\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\}$

2) $z^2=-4$ يعني $z^2=(2i)^2$: $z=2i$ و $z=-2i$

ومنه : $S=\{-2i;2i\}$

3) $z^2=-3$ يعني $z^2=(\sqrt{3}i)^2$: $z=\sqrt{3}i$ و $z=-\sqrt{3}i$

ومنه : $S=\{-\sqrt{3}i;\sqrt{3}i\}$

تمرين2: حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية :

1) $z^2-z+2=0$

2) $z^2-z-2=0$

3) $z^2-2z+1=0$

أجوبة :1) مميز المعادلة هو:

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)=-7=(i\sqrt{7})^2$.

حلا المعادلة هما: $z_1=\frac{1+i\sqrt{7}}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}$ و

$z_2=\overline{z_1}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2}$.

إذن: $S=\left\{\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{7}}{2};\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

2) مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(-2)=9=(3)^2$

حلا المعادلة هما: $z_1=\frac{1-3}{2}=-1$ و $z_2=\frac{1+3}{2}=2$.

إذن: . $S=\{-1;2\}$

3) مميز المعادلة هو: $\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4=0$

للمعادلة حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$ إذن: .

$S=\{1\}$

تمرين3: لكل z من $\mathbb{C}$, نضع: $P(z)=z^2-2z+2$

1. أحسب $P(1-i)$
2. استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$

الجواب : 1)

$P(1-i)=(1-i)^2-2(1-i)+2=-2i-2+2i+2=0$

وبالتالي : $z_1=1-i$ جذر للحدودية العقدية $P(z)$

ونعلم أن : اذن $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ أي $1-i+z_2=-\frac{-2}{1}$

أي : $z_2=2+i-1=1+i$ ومنه : $S=\{1-i;1+i\}$

تمرين4 : حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين:

1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ 2) $z^2-6z+13=0$

الجواب : 1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ يعني $z^2-4=0$ أو $z^2+9=0$

يعني $z^2=4$ أو $z^2=-9$ يعني $z=\sqrt{4}$ أو $z=-\sqrt{4}$ أو $z=\sqrt{9}i$ أو $z=-\sqrt{9}i$

يعني $z=2$ أو $z=-2$ أو $z=3i$ أو $z=-3i$

ومنه : $S=\{-3i;3i;-2;2\}$

2) مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(13)=36-52=(4i)^2$.

حلا المعادلة (E) هما: $z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i$ و

$z_2=\overline{z_1}=3-2i$.

إذن: $S=\{3-2i;3+2i\}$

تمرين5: 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$.

2) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.

أ. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .

ب. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث : $P(z)=(z+i)(az^2+bz+c)$.

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

أجوبة : 1) $z^2-8z+17=0$

مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4(17)=64-68=(2i)^2$.

حلا المعادلة (E) هما: $z_1=\frac{8+2i}{2}=4+i$ و

$z_2=\overline{z_1}=4-i$.

إذن: $S=\{4-i;4+i\}$

2)أ) ليكن : $z_0 = bi$ حلا تخيليا صرفا للمعادلة.

لدينا اذن : $z_0^3 + (-8+i)z_0^2 + (17-8i)z_0 + 17i = 0$

يعني : $(bi)^3 + (-8+i)(bi)^2 + (17-8i)(bi) + 17i = 0$

يعني : $-ib^3 - (-8+i)b^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

يعني : $-ib^3 + 8b^2 - ib^2 + 17bi + 8b + 17i = 0$

يعني : $8b^2 + 8b + i(-b^3 - b^2 + 17b + 17) = 0$

يعني : $\begin{cases} 8b^2+8b=0 \\ -b^3-b^2+17b+17=0 \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} 8b(b+1)=0 \\ -b^3-b^2+17b+17=0 \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} b=0 \text{ ou } b=-1 \\ -b^3-b^2+17b+17=0 \end{cases}$

$b=0$ لا يحقق المعلدلة الثانية لأن : $-0^3-0^2+170+17\neq 0$

$b=-1$ يحقق المعلدلة الثانية لأن :

$-(-1)^3-(-1)^2+17(-1)+17=0$

ومنه $b=-1$ اذن : $z_0=(-1)i=-i$ حل تخيلي صرف للمعادلة.

2)ب) $(z+i)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+aiz^2+biz+ci$

$P(z)=az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ci$

بالمقارنة مع $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$

نجد أن : $\begin{cases} a=1 \\ b+ai=-8+i \\ c+bi=17-8i \\ ci=17i \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} a=1 \\ b=-8 \\ c-8i=17-8i \\ c=17 \end{cases}$

ومنه : $a=1$ و $b=-8$ و $c=17$ وبالتالي الكتابة الجديدة ل $P(z)$

هي : $P(z)=(z+i)(z^2-8z+17)$

2)ج) $P(z)=0$ يعني $(z+i)(z^2-8z+17)=0$

يعني $z+i=0$ أو $z^2-8z+17=0$

يعني $z_1=4+i$ أو $z_2=4-i$ أو $z_0=-i$

وبالتالي : $S=\{4-i;4+i;-i\}$

<u>تمرين6:</u> نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$, المعادلة:

$$(E): z^3+2(\sqrt{3}-1)z^2+4(1-\sqrt{3})z-8=0$$

1. بين أن العدد 2 حل للمعادلة (E)
2. بين أن لكل z من $\mathbb{C}$, لدينا:

$$z^3+2(\sqrt{3}-1)z^2+4(1-\sqrt{3})z-8=(z-2)(z^2+2\sqrt{3}z+4)$$

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

<u>أجوبة : 1)</u>

$2^3+2(\sqrt{3}-1)2^2+4(1-\sqrt{3})2-8=8+8(\sqrt{3}-1)8+8(1-\sqrt{3})-8$

$=8+8\sqrt{3}-8+8-8\sqrt{3}-8=0$

ومنه : العدد 2 حل للمعادلة (E)

2) $(z-2)(z^2+2\sqrt{3}z+4)=z^3+2\sqrt{3}z^2+4z-2z^2-4\sqrt{3}z-8$

$=z^3+2(\sqrt{3}-1)z^2+4(1-\sqrt{3})z-8$

3) $P(z)=0$ يعني $(z-2)(z^2+2\sqrt{3}z+4)=0$

يعني $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$ أو $z-2=0$

يعني $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$ أو $z=2$

نحل المعادلة : $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$

مميز المعادلة هو :

$$\Delta=b^2-4ac=(2\sqrt{3})^2-4(4)=12-16=(2i)^2 .$$

حلا المعادلة $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$

هما: $z_1=\frac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$ و $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}-i$.

إذن: مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;2\}$

<u>تمرين7:</u> حدد الترميز الأسي للعدد العقدي $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

<u>الجواب :</u> ليكن: , لدينا: $|z|=2$ و $\arg z\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$ إذن

$z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هو الترميز الأسي للعدد العقدي z

<u>تمرين8:</u> أعط شكلا أسيا لكل عدد من الأعداد التالية:

1) $z_1=2+2i$ 2) $z_2=1-i\sqrt{3}$ 3) $z_1\times z_2$

4) $\frac{z_1}{z_2}$ 5) $(z_2)^{12}$

<u>أجوبة : 1)</u> $z_1=2+2i$ لدينا: $|z_1|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

ومنه : $z_1=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2=1-i\sqrt{3}$ لدينا: $|z_2|=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}=\sqrt{4}=2$

$1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

اذن : $z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ ومنه : $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $z_1\times z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2e^{-i\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$

4) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$

5) $(z_2)^{12}=\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12}=2e^{-i12\frac{\pi}{3}}=2e^{-4i\pi}$

<u>تمرين9:</u> بين أن: $\cos^2\theta=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$ لكل θ من $\mathbb{R}$

<u>الجواب :</u> لديناحسب صيغ أولير : $\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و

$e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos n\theta$

و منه:

$$\cos^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2+2e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2\right)=\frac{1}{4}\left(\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)+2\right).$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\cos 2\theta+2\right)=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$$

تمرين10: بين أن: $\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لدينا: $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ و

$\sin n\theta=\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ و منه:

$$\sin^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2-2e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2\right)=-\frac{1}{4}\left(\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)-2\right).$$

$$=-\frac{1}{4}\left(2\cos 2\theta-2\right)=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

ملحوظة: لكل n من $\mathbb{N}$ و θ من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta) \text{ و } e^{in\theta}-e^{-in\theta}=2i\sin(n\theta)$$

تمرين11: بين أن: $\cos^3\theta=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لديناحسب صيغة أولير :

$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ اذن $\cos n\theta=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$

و منه:

$$\cos^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3+3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2+\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(e^{i\theta 3}+3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta 3}+e^{-i3\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)$$

ونعلم أن : $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ و منه:

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos 3\theta+3\times 2\cos\theta\right)=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

تمرين12: بين أن: $\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لديناحسب صيغة أولير :

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

و منه:

$$\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3-3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-\left(e^{-i\theta}\right)^3\right).$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(e^{i\theta 3}-3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta 3}-e^{-i3\theta}\right)-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

ونعلم أن : $2i\sin n\theta=e^{in\theta}-e^{-in\theta}$

$$=-\frac{1}{8i}\left(2i\sin 3\theta-3\times 2i\sin\theta\right)=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$

تمرين13: بين أن: $\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$

لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لديناحسب صيغة أولير :

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

و منه: $\sin^4\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^4$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(\left(e^{i\theta}\right)^4-4\left(e^{i\theta}\right)^3\cdot e^{-i\theta}+6\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-4\left(e^{i\theta}\right)^1\left(e^{-i\theta}\right)^3+\left(e^{-i\theta}\right)^4\right).$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{3i\theta}\cdot e^{-i\theta}+6e^{2i\theta}\cdot e^{-2i\theta}-4e^{i\theta}\cdot e^{-3i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(e^{4i\theta}-4e^{2i\theta}+6-4e^{-2i\theta}+e^{-4i\theta}\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6+\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(-4\left(e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}\right)+6+\left(e^{4i\theta}+e^{-4i\theta}\right)\right)$$

لدينا: $e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)$ و منه:

$$\sin^4\theta=\frac{1}{16}\left(-4\times 2\cos 2\theta+6+2\cos 4\theta\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}\left(-4\cos 2\theta+3+\cos 4\theta\right)$$

$$\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$$

تمرين14: بين أن: $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ و

$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : لدينا حسب صيغة موافر:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

و لدينا أيضا:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta$$

و منه: $\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$

إذن: $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$ و $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

(حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

تمرين15: بين باستعمال صيغة موافر أن:

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

و أن: $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : لدينا حسب صيغة موافر:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

و لدينا أيضا:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^3=\cos^3\theta+3\left(\cos\theta\right)^2 i\sin\theta+3\cos\theta\left(i\sin\theta\right)^2+\left(i\sin\theta\right)^3$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)$$

و منه:

$$\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

إذن: $\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$

و $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$ (حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)$$

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta + 3\cos^3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\left(1-\sin^2\theta\right)\sin\theta - \sin^3\theta$$
$$= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

تمرين16: حل في $\mathbb{C}$: **-1** $2Z^2-2Z+5=0$ **-2** $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

الأجوبة: **-1** حل المعادلة : $2Z^2-2Z+5=0$

لدينا : $\Delta=-36$ $\quad z_1=\frac{2-i\sqrt{36}}{4}$; $z_2=\frac{2+i\sqrt{36}}{4}$

إذن : $\boxed{S=\left\{\frac{1-3i}{2}\ ;\ \frac{1+3i}{2}\right\}}$

-2 $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

نلاحظ أن : 1 يعدم $3Z^3-3Z^2+2Z-2$

و منه : $z-1$ يقسم $3Z^3-3Z^2+2Z-2$

نجد : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=(Z-1)\left(3Z^2+2\right)$

حل المعادلة : $3Z^2+2=0$

إذن : $Z^2=-\frac{2}{3}$: $Z=i\sqrt{\frac{2}{3}}$ أو $Z=-i\sqrt{\frac{2}{3}}$

ومنه : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

يعني : $Z=1$ أو $Z=i\sqrt{\frac{2}{3}}$ أو $Z=-i\sqrt{\frac{2}{3}}$

إذن : $\boxed{S=\left\{1;i\sqrt{\frac{2}{3}};-i\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}}$

تمرين17: $P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$

1) بين أن $(E): P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا z_0 يجب تحديده

2) حل في $\mathbb{C}$: $P(Z)=0$

الأجوبة. 1) لنبين أن $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا

نعتبر : $z_0=ib$

$$P(z_0)=0 \Leftrightarrow (ib)^3-(16-i)(ib)^2+(89-16i)ib+89i=0$$
$$\Leftrightarrow 16b^2+16b+i\left(-b^3-b^2+89b+89\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}16b^2+16b=0\\ -b^3-b^2+89b+89=0\end{cases}$$

$$\boxed{P(z_0)=0 \Leftrightarrow b=-1}$$

و منه : $P(Z)=0$ تقبل حلا تخيليا صرفا $z_0=-i$

2) حل المعادلة $P(Z)=0$ في $\mathbb{C}$:

بما أن : $-i$ جذر ل $P(Z)$ فإن :

$$P(Z)=(z+i)\left(z^2+\alpha z+\beta\right)$$
$$P(Z)=z^3+(i+\alpha)z^2+(\alpha i+\beta)z+\beta i$$

و بما أن : $P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$

فإن : $\boxed{\alpha=-16}$ و $\boxed{\beta=89}$

و منه : $P(Z)=(z+i)\left(z^2-16z+89\right)$

حل المعادلة : $z^2-16z+89=0$

نجد : $\Delta=-100$ ومنه $z=8-5i$ او $z=8+5i$

إذن: مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S=\{-i;8-5i;8+5i\}$

تمرين18: نعتبر : $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1) أ) حدد الشكل الأسى ل z ب) حدد الشكل الجبري ل z

2) استنتج $\cos\frac{11\pi}{12}$ و $\sin\frac{11\pi}{12}$

الأجوبة: 1) أ) تحديد الشكل الأسى : $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

$$z=e^{-i\pi}\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi}=e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

ب) تحديد الشكل الجبري:

$$z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=-\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right)}{4}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$$

$$\boxed{z=\frac{-\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}+i\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}}$$

2) من أ) و ب) : $\cos\frac{-11\pi}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}$ و $\sin\frac{-11\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)}{4}$

إذن $\boxed{\cos\frac{11\pi}{12}=-\frac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{4}}$ $\boxed{\sin\frac{11\pi}{12}=\frac{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}}$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien