

# الأعداد العُقدية

## 1. تقديم و تعاريف :

- ❖ توجد مجموعة يرمز لها ب  $\mathbb{C}$  و تسمى مجموعة الأعداد العقدية و تحقق  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  و هي تحتوي على عدد نرمل له ب  $i$  حيث  $i^2 = -1$
- ❖ كل عدد  $z$  من  $\mathbb{C}$  يكتب على شكل  $z = a + ib$  مع  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- ❖ العدد  $a$  يسمى الجزء الحقيقي و نرمل له ب  $\Re(z)$
- ❖ العدد  $b$  يسمى الجزء التخيلي و نرمل له ب  $\Im(z)$
- ❖ الكتابة  $z = a + ib$  مع  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي  $z$
- ❖ إذا كان  $z = ib$  حيث  $b \in \mathbb{R}$  نقول أن  $z$  تخيلي صرف و نكتب  $z \in i\mathbb{R}$

## 2. خاصيات :

- ليكن  $(z, z') \in \mathbb{C}^2$  لدينا :
- $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Im(z) = 0$
  - $z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(z) = 0$
  - $z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) = \Re(z') \\ \Im(z) = \Im(z') \end{cases}$
  - $z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(z) = 0 \\ \Im(z) = 0 \end{cases}$

### العمليات في $\mathbb{C}$

ليكن  $z = a + ib$  و  $z' = a' + ib'$

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$
- $-z = -a - ib$
- $\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2}$
- جميع خصائص الجداء و الجمع في  $\mathbb{R}$  تبقى صالحة في  $\mathbb{C}$
- $(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi$
- $(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi$
- $(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2$

### 3. مرافق عدد عقدي

#### تعريف :

مرافق العدد العقدي  $z = a + ib$  مع  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  هو العدد العقدي  $\bar{z} = a - ib$

#### خاصيات المرافق

ليكن  $z_1$  و  $z_2$  عددين عقديين

- ✓  $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
- ✓  $\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
- ✓  $(z_1 \neq 0) \quad \frac{1}{\overline{z_1}} = \overline{\frac{1}{z_1}}$
- ✓  $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
- ✓  $\overline{z^n} = \overline{z}^n$  حيث  $n \in \mathbb{Z}$  و  $z \in \mathbb{C}$

نتائج :

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2\operatorname{Re}(z) & \bullet \\ z - \bar{z} &= 2i \operatorname{Im}(z) & \bullet \\ z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow z = \bar{z} & \bullet \\ z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow z = -\bar{z} & \bullet \end{aligned}$$

4. معيار عدد عقدي :

معيار العدد العقدي  $z = a + ib$  مع  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ  $|z|$  و هو معرف بما يلي :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

خاصيات :

ليكن  $z$  و  $z'$  عددين عقديين

$$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} \quad \checkmark$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \quad \checkmark$$

$$(z \neq 0) \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \checkmark$$

$$(z' \neq 0) \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \checkmark$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } |z^n| = |z|^n \quad \checkmark$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \checkmark$$

5. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

أ. عمدة عدد عقدي غير منعدم :

ليكن  $z = x + iy$  من  $\mathbb{C}^*$  حيث  $x$  و  $y$  من  $\mathbb{R}$

$$\left\{ \begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta &= \frac{y}{|z|} \end{aligned} \right. : \text{كل عدد حقيقي } \theta \text{ بحيث : } \arg(z) = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

يسمى عمدة ل  $z$  و نكتب :

$$\text{أو } \arg(z) \equiv \theta [2\pi] \quad (k \in \mathbb{Z})$$

ب. خاصيات العمدة:

ليكن  $z_1$  و  $z_2$  عددين عقديين غير منعدمين

$$\arg(\bar{z}_1) \equiv -\arg(z_1)[2\pi] \quad \checkmark$$

$$\arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi] \quad \checkmark$$

$$\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z_1)[2\pi] \quad \checkmark$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi] \quad \checkmark$$

$$n \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث} \quad \arg(z_1^n) \equiv n \arg(z_1)[2\pi] \quad \checkmark$$

6. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم:

تعريف:

كل عدد عقدي  $z$  غير منعدم يكتب على شكل  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

حيث  $|z| = r$  و  $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$

خاصيات الشكل المثلثي:

- $\overline{r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))} = r(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
- $r(\cos \theta + i \sin \theta) \times r'(\cos \theta' + i \sin \theta') = rr'(\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$
- $\frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$
- $\frac{r(\cos \theta + i \sin \theta)}{r'(\cos \theta' + i \sin \theta')} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))$
- $(r(\cos \theta + i \sin \theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$  حيث  $n \in \mathbb{Z}$  (علاقة موافر)

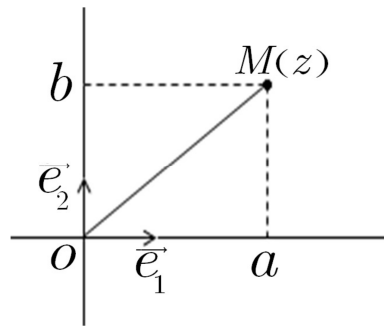
7. تأويلات هندسية للأعداد العقدية :

تعريف:

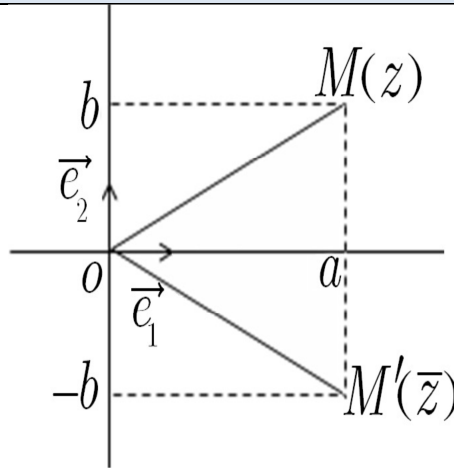
في المستوى  $(P)$  المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

لنكن النقطة  $M(a, b)$

- العدد العقدي  $z = a + ib \in \mathbb{R}^2$  يسمى لحق النقطة  $M$
- النقطة  $M(a, b)$  تسمى صورة العدد  $z = a + ib$  حيث  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

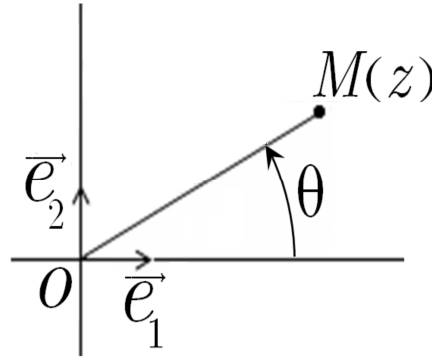


- مرافق  $z = a + ib$  هو  $\bar{z} = a - ib$

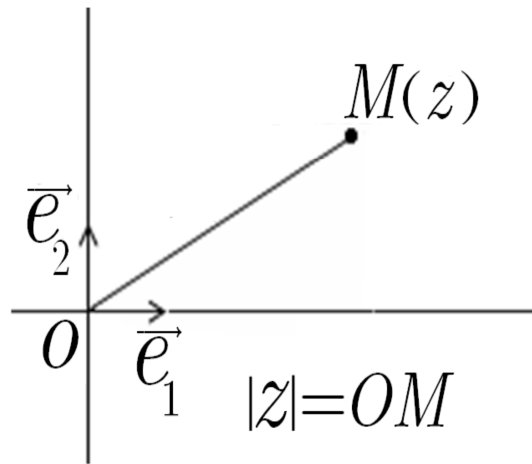


- لدينا كذلك  $z = a + ib$  هو لحق المتجهة  $\vec{U}(a, b)$
- المستوى  $(P)$  يسمى المستوى العقدي
- $(O, \vec{e}_1)$  يسمى المحور الحقيقي
- $(O, \vec{e}_2)$  يسمى المحور التخيلي
- $\vec{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$  ونكتب  $z_M = a + ib$  أو  $\text{aff}(M) = a + ib$

❖ ليكن  $z = a + ib$  لحق النقطة  $M$  من المستوى العقدي لدينا :  $\arg(z) \equiv (\vec{e}_1, \overline{OM}) [2\pi]$



❖ المسافة  $OM : OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$



المسافة  $AB$  :  
لتكن  $A$  و  $B$  نقطتان لحقهما على التوالي  $z_A$  و  $z_B$   
لدينا :  $AB = |z_B - z_A|$

خاصيات :

لتكن  $A$  و  $B$  نقطتان لحقهما على التوالي  $z_A$  و  $z_B$   
و  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان من المستوى العقدي  $(P)$  :

- لحق المتجهة  $\overline{AB}$  هو :  $z_B - z_A$
- لحق المتجهة  $\vec{u} + \vec{v}$  هو :  $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$
- لحق النقطة  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$  هو :  $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$
- $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}}$
- $M$  نقطة لدينا :
- $\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} \Leftrightarrow z_M = z_A + z_B$
- $\overline{OM} = \alpha \cdot \overline{OA} \Leftrightarrow z_M = \alpha \cdot z_A$

- لتكن  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$  و  $C(z_C)$  و  $D(z_D)$  نقط مختلفة منى منى
- $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow C$  و  $B$  و  $A$  مستقيمة
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \parallel (DC)$
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow$
- $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \perp (DC)$
- $\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow$
- النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  متداورة  $\Leftrightarrow \frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R}$

قياس الزوايا :

لتكن  $A(z_A)$  و  $B(z_B)$  و  $C(z_C)$  و  $D(z_D)$

- $O \neq A$  حيث  $(\overline{e_1}, \overline{OA}) \equiv \arg(z_A)[2\pi]$
- $A \neq B$  حيث  $(\overline{e_1}, \overline{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$
- حيث  $A \neq C$  و  $A \neq B$   $(\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$

$$\left( \overline{AB}, \overline{DC} \right) \equiv \arg \left( \frac{z_C - z_D}{z_B - z_A} \right) [2\pi] \quad \bullet$$

حيث  $A \neq B$  و  $C \neq D$

### 8. الشكل الأسى لعدد عقدي :

#### تعريف :

كل عدد عقدي غير منعدم يكتب على شكله الأسى ب:  $z = re^{i\theta}$   
حيث  $|z| = r$  و  $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$

#### خاصيات :

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta \quad \checkmark \\ e^{-i\theta} &= e^{-i\theta} \quad \checkmark \\ \frac{1}{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} \quad \checkmark \\ e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} \quad \checkmark \\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} &= e^{i(\theta-\theta')} \quad \checkmark \\ (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} \quad \checkmark \end{aligned}$$

#### صيغ أولير

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$



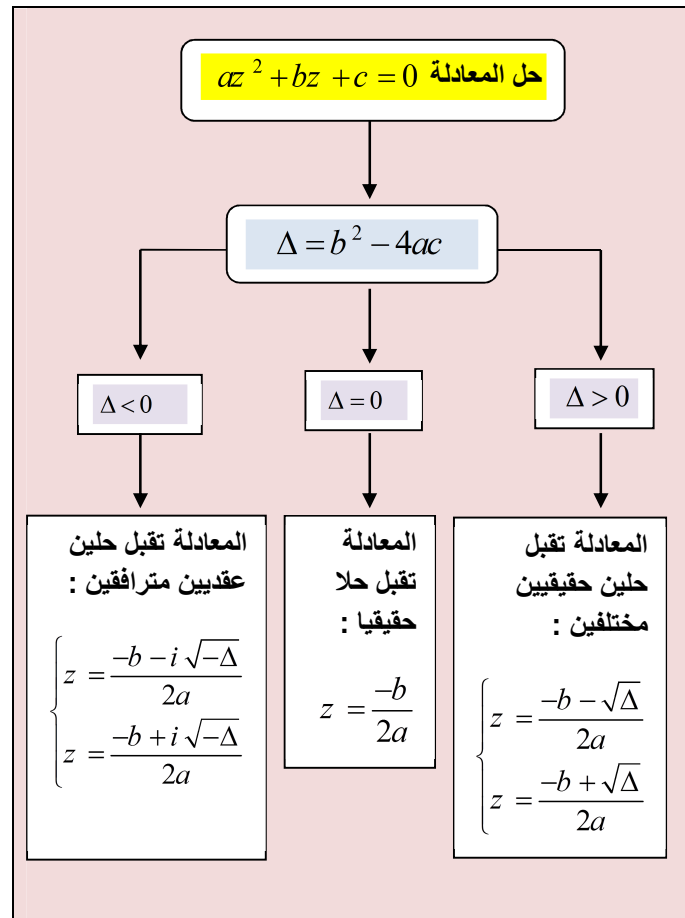
9. المعادلات في  $\mathbb{C}$

أ. المعادلة  $z^2 = a$  ( $a \in \mathbb{R}^*$ )

إذا كان  $a \in \mathbb{R}_*^-$  لدينا :  $z^2 = a \Leftrightarrow z = i\sqrt{-a}$  و  $z = -i\sqrt{-a}$

إذا كان  $a \in \mathbb{R}_*^+$  لدينا :  $z^2 = a \Leftrightarrow z = \sqrt{a}$  و  $z = -\sqrt{a}$

ب. المعادلة  $az^2 + bz + c = 0$  : حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  من  $\mathbb{R}$  مع  $a \neq 0$  :



10. التحويلات الاعتيادية :

خاصية :

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة  $M(z)$  بالنقطة  $M'(z')$

❖ الكتابة العقدية للإزاحة  $T$  ذات المتجهة  $\vec{u}$  هي :  $z' = z + z_{\vec{u}}$

❖ الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه  $\Omega(\omega)$  ونسبته  $k$  هي :  $z' - \omega = k(z - \omega)$

❖ الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه  $\Omega(\omega)$  وزاويته  $\theta$  هي :  $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$