.01

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على ب : $f(x)=-x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}$ (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

.01 ...

أ- حدد : D مجموعة تعريف الدالة f .

لدينا :

$$x\in D_f \Leftrightarrow x+1>0$$
$$\Leftrightarrow x>-1$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f $D_f=]-1;+\infty[$

ب- أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة الثانية .

لدينا :

- $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}}=0\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}=-\infty$.
- $\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+1}=0^+\right)$; $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}=+\infty$.
- التأويل الهندسي للنتيجة الثانية : منحنى الدالة يقبل مقارب عمودي هو المستقيم (Δ) ذو المعادلة : $x=-1$: (Δ).

ج- نبين أن (C) يقبل مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ يتم تحديد معادلته .

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ إذن (C) يقبل فرع اللانهائي بجوار $+\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}-x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}-(-x)=-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x+1}}=0$

و منه المستقيم ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل ل (C) بجوار $+\infty$

د- ندرس الوضع النسبي ل (C) و (Δ) .

لدينا : $f(x)-(-x)=-x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}-(-x)=\frac{2}{\sqrt{x+1}}>0$

و منه : المنحنى (C) يوجد فوق المقارب المائل .

.02...

أ- نحسب f ' الدالة المشتقة ل f على D ثم حدد إشارتها .

$$f'(x)=\left[-x+\frac{2}{\sqrt{x+1}}\right]'=-1+2\times\left(\sqrt{x+1}\right)'\times\frac{-1}{\sqrt{x+1}^2}$$

لدينا :

$$=-1-2\times\frac{1}{\sqrt{x+1}}\times\frac{1}{x+1}$$

$$=-\frac{(x+1)\sqrt{x+1}+2}{(x+1)\sqrt{x+1}}<0\ ;\ (x+1>0)$$

ب- نضع جدول لتغيرات الدالة f .

x	-1 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$ $\qquad$ $-$
$f(x)$	$\|\|$ $+\infty$ $\searrow$ $-\infty$

ج- أوجد معادلة ديكارتية للماس (T) للمنحنى (C) في $x_0 = 0$.

لدينا :

$$y = (x - x_0)f'(x_0) - f(x_0) \;\; ; (x_0 = 0)$$
$$= -3x + 2 \qquad ; (f'(0) = -3 \;; f(0) = 0)$$

خلاصة : معادلة ديكارتية للماس (T) للمنحنى (C) في $x_0 = 0$ هي : $(T) : y = -3x + 2$

03. بين أن المعادلة : $f(x) = x \;;\; x \in]-1;+\infty[$ تقبل حل وحيد α حيث $0 < \alpha < \frac{3}{2}$.

لنعتبر الدالة : $g(x) = f(x) - x$

- الدالة g هي متصلة على $]-1;+\infty[$ (لأنها مجموع دالتين متصلتين)إذن هي متصلة على $\left[0;\frac{3}{2}\right]$.
- الدالة g هي قابلة للاشتقاق على $\left[0;\frac{3}{2}\right]$ مع $(f'(x) < 0)$; $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$.
- $g(0) \times g\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{-25 + 4\sqrt{10}}{10}\right) \simeq 2 \times (-1,74) < 0$.

ومنه : يوجد عدد وحيد $\alpha \in \left]0;\frac{3}{2}\right[$ حيث $g(\alpha) = 0$ أي $f(\alpha) - \alpha = 0$ أي $f(\alpha) = \alpha$

و بالتالي المعادلة : $f(x) = x \;;\; x \in]-1;+\infty[$ تقبل حل وحيد α حيث $0 < \alpha < \frac{3}{2}$

خلاصة : المعادلة : $f(x) = x \;;\; x \in]-1;+\infty[$ تقبل حل وحيد α حيث $0 < \alpha < \frac{3}{2}$.

04. أنشئ المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (Δ) و المماس (T) في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

(أنظر آخر التمرين)

05. ...

أ- نبين أن f تحقق تقابل من $]-1;+\infty[$ إلى مجال J يتم تحدده نضع f^{-1} الدالة العكسية ل f .

- الدالة f هي متصلة على $]-1;+\infty[$ (لأنها مجموع دالتين متصلتين) .
- الدالة f تناقصية قطعا على $]-1;+\infty[$.
- و منه : الدالة f تقابل من $]-1;+\infty[$ إلى $J = f(]-1;+\infty[) = \mathbb{R}$

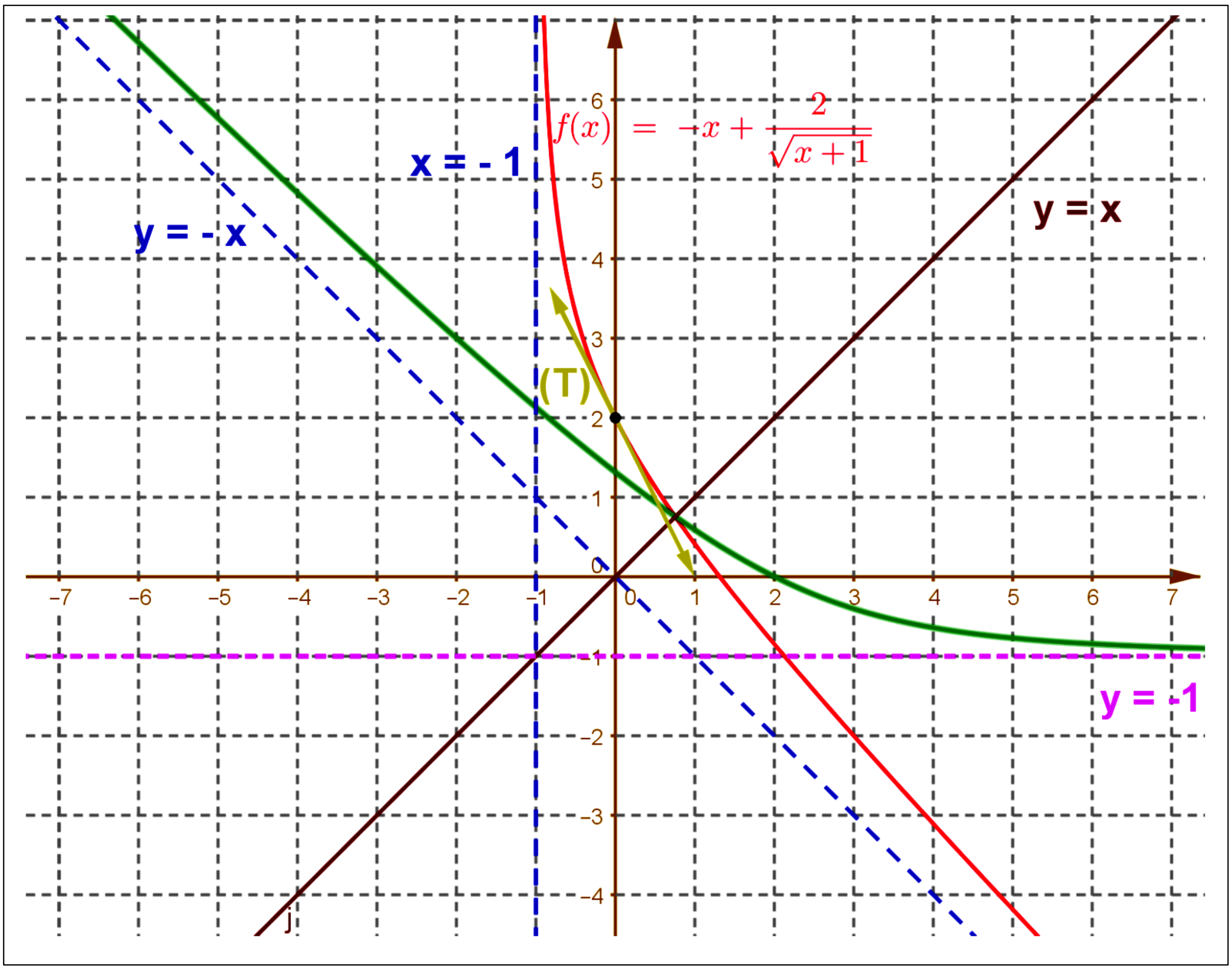
ب- نبين أن : f^{-1} قابلة للاشتقاق على J .

لدينا : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-1;+\infty[$ و دالتها المشتقة $f'(x)<0$ على $]-1;+\infty[$ إذن $f'(x)\neq 0$ و بالتالي الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على $f(I)=J$.

ج- نحسب بدلالة α : $(f^{-1})'(\alpha)$.

$$
\begin{aligned}
(f^{-1})'(\alpha) &= \frac{1}{f'\circ f(\alpha)} \\
&= \frac{1}{f'(f(\alpha))} \\
&= \frac{1}{f'(\alpha)} \qquad ; \qquad \text{لدينا : } (f(\alpha)=\alpha) \\
&= \frac{1}{-1-2\times\frac{1}{\sqrt{\alpha+1}}\times\frac{1}{\alpha+1}} \\
&= -\frac{(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1}}{(\alpha+1)\sqrt{\alpha+1}+2}
\end{aligned}
$$

د- ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية f^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (بلون آخر) .



.02

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على ب : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{-x}{2x+1} & ; \ x\geq 0 \\ f(x)=-x+\sqrt{x^2-x} & ; \ x<0 \end{cases}$ (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

.01 ...

أ- نتحقق أن : مجموعة تعريف الدالة f هي $D=\mathbb{R}$.

- الدالة $x\mapsto\dfrac{-x}{2x+1}$ معرفة على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$ إذن الدالة f معرفة على $D_1=[0;+\infty[$.
- الدالة $x\mapsto -x+\sqrt{x^2-x}$ معرفة لكل x حيث $x^2-x=x(x-1)\geq 0$ أي على $D_2=]-\infty;0]\cup[1;+\infty[$.
- و منه الدالة f معرفة على $D_f=D_1\cup D_2=\mathbb{R}$.

خلاصة : الدالة f معرفة على $D_f=\mathbb{R}$.

ب- نحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة الأولى .

- لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x}{2x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\cancel{x}}{2\cancel{x}}=-\dfrac{1}{2}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\dfrac{1}{2}$
- التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل مقارب أفقي هو المستقيم ذو المعادلة $y=-\dfrac{1}{2}$.
- لدينا : $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} -x=+\infty ; \lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x}=+\infty\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} -x+\sqrt{x^2-x}=+\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

ج- ندرس الفرع اللانهائي ل (C) بجوار $-\infty$.

- بما أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ إذن المنحنى (C) يقبل فرع اللانهائي بجوار $-\infty$.
- نحدد a :

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+\sqrt{x^2-x}}{x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}\\&=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}-\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} \quad ; \ (|x|=x \ ; \ x\to-\infty)\\&=\lim_{x\to-\infty} -1-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=-2\end{aligned}$$

و منه : $a=-2$

- نحدد b :

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-2x)=\lim_{x\to-\infty} -x+\sqrt{x^2-x}+2x$$
$$=\lim_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-(x^2-x)}{x-\sqrt{x^2-x}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x-|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}} \quad ;\ (|x|=x\ ;\ x\to-\infty)$$
$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}+\cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$
$$=\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}}}$$
$$=\frac{1}{2}$$

و منه : $b=\frac{1}{2}$

خلاصة : منحنى الدالة f يقبل مقارب مائل هو المستقيم ذو المعادلة $y=-2x+\frac{1}{2}$.

د- أدرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=0$.

- اشتقاق الدالة f على يمين النقطة $x_0=0$.

لدينا :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{-x}{2x+1}-0}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\cancel{x}}{\cancel{x}(2x+1)}=\lim_{x\to0^+}\frac{-1}{(2x+1)}=-1\in\mathbb{R}\ .$$

- التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين النقطة $x_0=0$ معامله الموجه هو $-\frac{1}{2}$.

- اشتقاق الدالة f على يسار النقطة $x_0=0$.

لدينا :

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x+\sqrt{x^2-x}\ -0}{x}$$
$$=\lim_{x\to0^-}\frac{-x+|x|\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\cancel{x} - \cancel{x}\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\cancel{x}} \quad ; \left(|x| = -x \ ; \ x \to 0^-\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -1 - \sqrt{1-\frac{1}{x}}$$

$$= -\infty$$

و منه الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار النقطة $x_0 = 0$

- التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يسار النقطة $x_0 = 0$ موازي لمحو الأراتيب .

د- أدرس اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0 = 0$.

بما أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق على يسار النقطة $x_0 = 0$ فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$.

- التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل نقطة مزواة النقطة $x_0 = 0$

02....

أ- نبين أن : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f على $]0,+\infty[$ ثم حدد إشارتها .

- لدينا : الدالة $x \mapsto \frac{-x}{2x+1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$ إذن الدالة f معرفة على $]0,+\infty[$.

- لدينا : $f'(x) = \left[\frac{-x}{2x+1}\right]' = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \times \frac{1}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{(2x+1)^2} < 0$ ومنه : $f'(x) < 0$ على $]0,+\infty[$

ب- نبين أن : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]-\infty,0[$ ثم أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f على $]-\infty,0[$ ثم تحقق أن

$$\forall x \in]-\infty,0[\ ; \ f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} .$$

- الدالة $x \mapsto x^2 - x$ قابلة للاشتقاق و موجبة على $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ إذن الدالة $x \mapsto -x+\sqrt{x^2-x}$ قابلة للاشتقاق على $]-\infty;0[\cup]1;+\infty[$ إذن الدالة f معرفة على $]-\infty,0[$.

- لدينا : $f'(x) = \left[-x+\sqrt{x^2-x}\right]' = -1 + \frac{(x^2-x)'}{2\sqrt{x^2-x}} = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} < 0 \ ; \ (x<0 \Rightarrow 2x-1 < -1)$

و منه : $f'(x) < 0$ على $]-\infty,0[$

ج- نضع جدول لتغيرات الدالة f $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ $-\infty$ ‖ -1 $\quad$ $-$
$f(x)$	$+\infty$ ↘ 0 ↘ $-\frac{1}{2}$

03. لنعتبر g قصور الدالة f على $I=\left]-\infty,0\right[$.

أ- بين أن g تقابل من I إلى مجال J يتم تحدده نضع g^{-1} الدالة العكسية ل g

لدينا :

- الدالة f متصلة و تناقصية قطعا على $I=\left]-\infty,0\right[$ إذن قصورها متصلة و تناقصية قطعا على $I=\left]-\infty,0\right[$ و بالتالي : g تقابل من I إلى مجال مع $J=f(I)=f\left(\left]-\infty,0\right[\right)=\left]0;+\infty\right[$

خلاصة : g تقابل من $I=\left]-\infty,0\right[$ إلى $J=\left]0;+\infty\right[$

ب- أحسب : $g^{-1}(1)$ ثم $\left(g^{-1}\right)'(1)$.

- نحسب $g^{-1}(1)$

نضع : $g^{-1}(1)=y$ مع $y\in I=\left]-\infty,0\right[$

$$\begin{aligned}
g^{-1}(1)=y &\Leftrightarrow g\left(g^{-1}(1)\right)=g(y)\\
&\Leftrightarrow g\circ g^{-1}(1)=f(y)\\
&\Leftrightarrow 1=-y+\sqrt{y^2-y}\\
&\Leftrightarrow 1+y=\sqrt{y^2-y}\\
&\Leftrightarrow (1+y)^2=y^2-y\left(1+y\geq 0\Rightarrow y\in\left[-1;0\right[\right)\\
&\Leftrightarrow \cancel{y^2}+2y+1=\cancel{y^2}-y\\
&\Leftrightarrow y=-\frac{1}{3}\in\left[-1;0\right[
\end{aligned}$$

ومنه : $g^{-1}(1)=-\frac{1}{3}\in I=\left]-\infty,0\right[$

خلاصة : $g^{-1}(1)=-\frac{1}{3}$.

- نحسب $\left(g^{-1}\right)'(1)$

$$\begin{aligned}
\left(g^{-1}\right)'(1)&=\frac{1}{g'\circ g^{-1}(1)}=\frac{1}{g'\left(g^{-1}(1)\right)}\\
&=\frac{1}{g'\left(-\frac{1}{3}\right)}\\
&=\frac{1}{f'\left(-\frac{1}{3}\right)}\\
&=\frac{1}{\left(-1+\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}\right)_{x=-\frac{1}{3}}}=-\frac{9}{4}
\end{aligned}$$

لدينا :

خلاصة : $\left(g^{-1}\right)'(1)=-\frac{9}{4}$.

ج- نحدد الدالة العكسية f^{-1} .

نعتبر $x\in I=\left]-\infty,0\right[$ و $y\in J=\left]0;+\infty\right[$

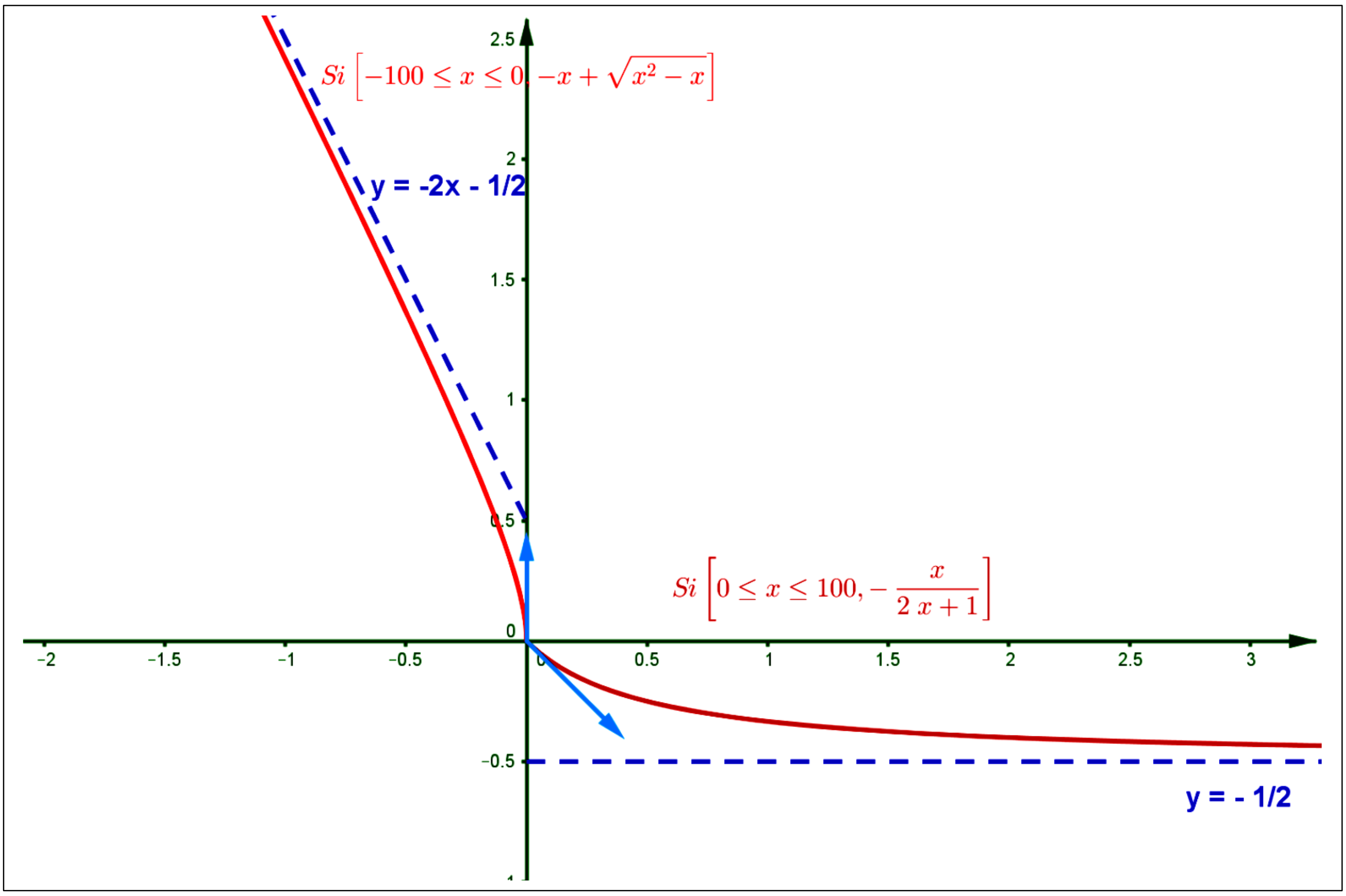
ومنه :

$$\begin{aligned}
g(x)=y &\Leftrightarrow -x+\sqrt{x^2-x}=y\\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x}=y+x \quad ;\ (y+x\geq 0)\\
&\Leftrightarrow x^2-x=(y+x)^2\\
&\Leftrightarrow \cancel{x^2}-x=y^2+\cancel{x^2}+2xy\\
&\Leftrightarrow -x(1+2y)=y^2\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-y^2}{1+2y}\in I=\left]-\infty,0\right[\qquad ;\ \left(y\in J=\left]0;+\infty\right[\Rightarrow 1+2y>0\right)
\end{aligned}$$

خلاصة : الدالة العكسية معرفة كما يلي : $g^{-1}\ :\ J=\left]0;+\infty\right[\to I=\left]-\infty,0\right[$

$x\mapsto g^{-1}(x)=\frac{-x^2}{1+2x}$

.04 أنشئ المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية g^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (بلون آخر)



.03

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب $f(x)=\cos x-\sin^2 x$. (C) منحنى f في معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=1$ و $\|\vec{j}\|=4$ (cm بالسنتميتر)

.01 ندرس زوجية الدالة f .

- لدينا لكل x من $D_f=\mathbb{R}$ كذلك $-x$ من $\mathbb{R}$.
- ليكن x من $D_f=\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \cos(-x)-\sin^2(-x) \\ &= \cos x-(-\sin x)^2 \\ &= \cos x-\sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه : $f(-x)=f(x)$

خلاصة : الدالة زوجية على $D_f=\mathbb{R}$.

.02 نبين أن : الدالة f دورية و دورها 2π ثم استنتج D_E مجموعة دراسة الدالة f .

❖ نبين أن الدالة f دورية و دورها 2π ثم

- لدينا لكل x من $D_f=\mathbb{R}$ كذلك $x+2\pi$ من $\mathbb{R}$ و $x-2\pi$ من $\mathbb{R}$
- ليكن x من $D_f=\mathbb{R}$ لدينا :

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \cos(x+2\pi)-\sin^2(x+2\pi) \\ &= \cos x-\sin^2 x \\ &= f(x) \end{aligned}$$

ومنه : $f(x+2\pi)=f(x)$

خلاصة : الدالة f دورية و دورها 2π.

❖ مجموعة دراسة الدالة f .

- بما أن الدالة f دورية و دورها 2π ندرسها على مجال سعته 2π مثلا على $[-\pi;\pi]$.
- بما أن الدالة f زوجية ندرسها على $[-\pi;\pi]\cap\mathbb{R}^+=[0;\pi]$

خلاصة : مجموعة دراسة الدالة f هي $D_E=[0;\pi]$.

.03 نتحقق أن : $f'(x)=-2\sin x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)$, $x\in[0,\pi]$.

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[\cos x-\sin^2 x\right]' \\ &= -\sin x-2(\sin x)'\sin x \\ &= -\sin x-2\cos x\sin x \end{aligned}$$

$$=-2\sin x\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)$$

.04 ندرس إشارة f' على $[0,\pi]$ ثم ضع جدول لتغيرات الدالة f على $[0,\pi]$.

❖ إشارة f' على $[0,\pi]$

- لدينا : على المجال $[0;\pi]$ الدالة $x\mapsto\cos x$ تناقصية

ومنه :

$$x\geq\frac{2\pi}{3}\Rightarrow\cos x\leq\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow\cos x\leq-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2\cos x+1\leq 0$$

على المجال $\left[\frac{2\pi}{3};2\pi\right]$ لدينا : $2\cos x+1\leq 0$. على المجال $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ لدينا : $2\cos x+1\geq 0$.

- على المجال $[0;\pi]$ الدالة $x\mapsto\sin x$ موجبة

إذن إشارة f' على $[0,\pi]$ بواسطة الجدول التالي : ثم جدول تغيرات الدالة f على $D_E=[0;\pi]$

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$-\sin x$	0	$-$		$-$	0
$2\cos x+1$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{4}$	$\nearrow$	-1

.05 نبين أن : g قصور f على $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ تحقق تقابل من $\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ إلى J يتم تحدده نرمز لتقابلها العكسي ب g^{-1} .

- الدالة f متصلة و تناقصية قطعا على $I=\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ إذن قصورها متصلة و تناقصية قطعا على $I=\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ و بالتالي : g تقابل من I إلى مجال مع $J=f(I)=f\left(\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]\right)=\left[-\frac{5}{4};1\right]$

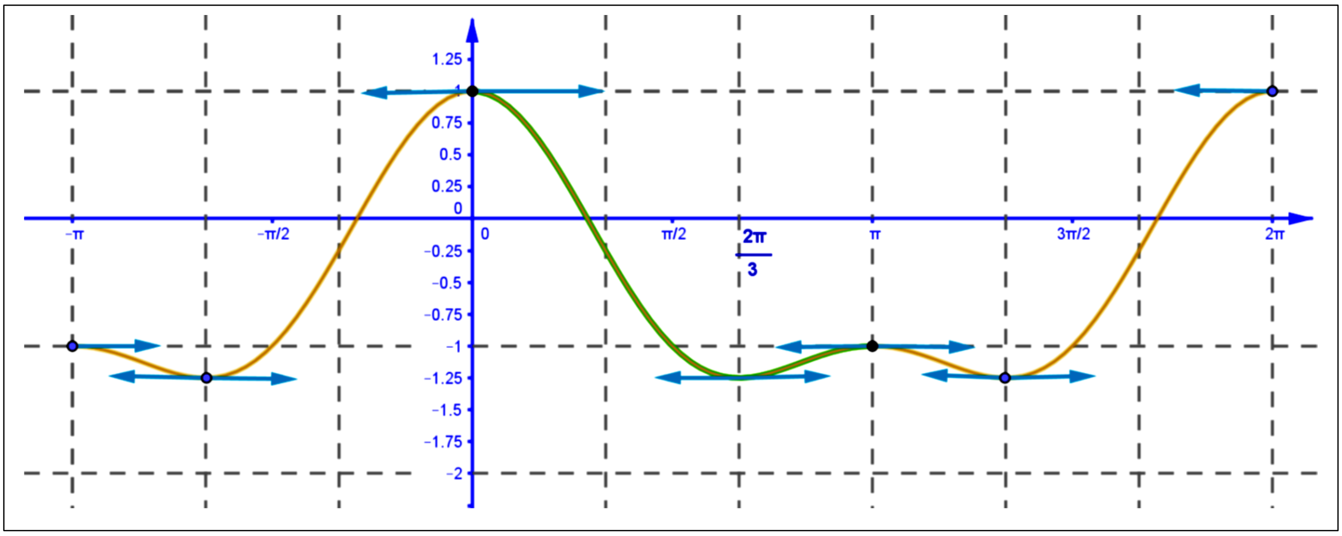
خلاصة : g تقابل من $I=\left[0;\frac{2\pi}{3}\right]$ إلى $J=\left[-\frac{5}{4};1\right]$

.06 ننشئ (C_f) منحنى f في $(O,\vec{i},\vec{j})$ و ذلك على D_E (بلون أخضر)

أنظر الشكل أسفله .

.07 نتمم إنشاء (C_f) منحنى f على $[-\pi,2\pi]$ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ (بلون' آخر) ثم $(C_{g^{-1}})$ منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم (بلون أخضر متقطع) .

أنظر الشكل أسفله .



.04 تمرين إضافي (في المنزل)

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ ب : $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} \;;\; x\in[0;1[\cup]1;+\infty[\\ f(1)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ (C) منحنى f في معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

.01 ...

أ- نحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة .

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}(\sqrt{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\\ &= 0\end{aligned}$$

خلاصة : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0}$

- التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل مقارب أفقي هو المستقيم ذو المعادلة $y=0$.

ب- ندرس اتصال الدالة f في النقطة $x_0=1$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1} f(x) &= \lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{\cancel{\sqrt{x}-1}}{\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}\left(\sqrt{x}+1\right)}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ولدينا : $f(1)=\frac{1}{2}$ و بالتالي : $\lim_{x\to1} f(x)=\frac{1}{2}=f(1)$

خلاصة : الدالة f متصلة في النقطة $x_0=1$.

ج- ندرس اتصال الدالة f على يمين النقطة $x_0=0$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\\ &= \frac{-1}{-1}\\ &= 1\end{aligned}$$

ولدينا : $f(0)=1$ و بالتالي : $\lim_{x\to0^+} f(x)=1=f(0)$

خلاصة : الدالة f متصلة على يمين النقطة $x_0=0$.

02...

أ- نبين أن الدالة f قابلة الاشتقاق في $x_0=1$ و تحقق أن $f'(1)=-\frac{1}{8}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} &= \lim_{x\to1}\frac{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}-\frac{1}{2}}{x-1}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{-x+2\sqrt{x}-1}{2(x-1)^2}\\ &= \lim_{x\to1}\frac{-\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}}{2\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)^2}\left(\sqrt{x}+1\right)^2}\end{aligned}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{-1}{2\left(\sqrt{x}+1\right)^2} = -\frac{1}{8}$$

ومنه : $\lim_{x \to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = -\frac{1}{8} \in \mathbb{R}$.

إذن : الدالة f قابلة الاشتقاق في $x_0 = 1$ و تحقق أن $f'(1) = -\frac{1}{8}$.

ب- نجد معادلة ديكارتية للماس (T) للمنحنى (C) في $x_0 = 1$.

المعادلة هي :

$$\begin{aligned} y &= (x-x_0)f'(x_0) - f(x_0)(x_0 = 1) \\ &= (x-1)f'(1) - f(1) \\ &= (x-1)\left(-\frac{1}{8}\right) - \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{8}x - \frac{3}{8} \end{aligned}$$

خلاصة : معادلة ديكارتية للماس (T) للمنحنى (C) في $x_0 = 1$ هي $y = -\frac{1}{8}x - \frac{3}{8}$.

03...

أ- هل الدالة f قابلة الاشتقاق على يمين $x_0 = 0$ ثم أعط تأويل هندسي للنتيجة المحصل عليها .

ندرس اشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 0$.

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} - 1}{x} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}-x}{x(x-1)} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}\left(1-\sqrt{x}\right)}{x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{\cancel{\sqrt{x}}\,\cancel{\left(1-\sqrt{x}\right)}}{\sqrt{x}^{\cancel{2}}\,\cancel{\left(\sqrt{x}-1\right)}\left(\sqrt{x}+1\right)} \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right)} \qquad ; \quad \left(\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x}\left(\sqrt{x}+1\right) = 0^+\right) \\ &= -\infty \end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty \notin \mathbb{R}$

خلاصة : الدالة f غير قابلة الاشتقاق على يمين $x_0 = 0$.

ب- التأويل الهندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس على يمين النقطة $x_0 = 0$ موازي لمحور الأراتيب

ج- بين أن : الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ ثم أحسب الدالة المشتقة f' للدالة f على $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ ثم تحقق أن $f'(x) = \frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\sqrt{x}\left(x-1\right)^2}$; $\forall x \in]0,+\infty[\setminus\{1\}$ ثم ضع جدول لتغيرات الدالة f $[0,+\infty[$.

❖ الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[\setminus\{1\}$.

- الدالة $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ إذن قابلة للاشتقاق $]0,+\infty[\setminus\{1\}$.
- الدالة $x \mapsto \sqrt{x}-1$ قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ إذن قابلة للاشتقاق $]0,+\infty[\setminus\{1\}$.
- و منه الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ (لأنها خارج دالتين قابلتين للاشتقاق)

❖ نحسب الدالة المشتقة f' للدالة f على $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ ثم تحقق.

لدينا :

$$f'(x) = \left[\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right]' = \frac{\left(\sqrt{x}-1\right)'(x-1)-\left(\sqrt{x}-1\right)(x-1)'}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\left(\sqrt{x}-1\right)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)-2x+2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

$$= \frac{-x+2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$$

$$= \frac{-\left(\sqrt{x}-1\right)^2}{2\sqrt{x}(x-1)^2} < 0$$

❖ نضع جدول لتغيرات الدالة f $[0,+\infty[$.

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	‖ $-\infty$ $\qquad$ $-$
$f(x)$	1 $\searrow$ 0

د- بين أن f تحقق تقابل من $[0,+\infty[$ إلى مجال J يتم تحدده نضع f^{-1} الدالة العكسية ل f .

لدينا :

- الدالة f متصلة و تناقصية قطعا على $I = [0,+\infty[$ و بالتالي : f تقابل من I إلى مجال مع $J = f(I) = f([0,+\infty[) =]0;1]$

خلاصة : f تقابل من $I=[0,+\infty[$ إلى $J=]0;1]$

04. ننشئ المنحنى الممثل للدالة f في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ثم أنشئ المنحنى الممثل للدالة العكسية f^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.