تمرين 1

احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x(x-2)} \quad ; \quad \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-x-6}{x-2};$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^3-1}{1-x^2};$$

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{x-\pi} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\frac{3x^3-1}{2x^2+5};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{xtgx} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x-\sin 2x}{x+\sin x};$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x-3}}{x-4} \quad ; \quad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1};$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{\sqrt{x^2+x+4}-4} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} x-\sqrt{x^2+1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{5x+3}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+9}-3} \quad ; \quad \lim_{x\to -\infty}\sqrt{x^2-3x}+x;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\cos x\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} x\sin\left(\frac{1}{x}\right);$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2x}{2\cos x-\sqrt{2}} \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty}\left(x^2+x+1\right)\sin\left(\frac{\pi}{x}\right);$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tg2x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\sin x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(1-\cos x)}{\sin^2 x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{3x+|x|}{3x-2|x|};$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos^2 x};$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin(2x-2)}{\sin(x-1)} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{tgx-\sin x}{x^3};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos\sqrt{|x|}}{|x|} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\cos(2tgx)-1};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(tg\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\frac{\pi}{2}tgx\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right);$$

$$**\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x-\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+\sin x}-\sqrt[3]{1-\sin x}}{tgx};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2+x\right)}{2x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin^2 x};$$

$$\lim_{x\to 2}(x-2)tg\left(\frac{\pi}{x}\right) \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{3tgx-\sin x}{x};$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\pi\left(\cos^2 x-\cos x\right)}{2\cos^2 x-3\cos x+1} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{x\sin x}{tg2x};$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin 2x} \quad ; \quad \lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x+5}-3}{x-4};$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x\sin x}{x^2+1} \quad ; \quad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}}(1-\sin x)tg^2 x \quad ;$$

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x+\cos x}{1-\sin x-\cos x}$$

تمرين 2

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=x-2\sqrt{x}+2 .$$

1. **حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.**
2. **بين أن f متصلة على D_f.**
3. **بين أن: $\lim_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$.**
4. **اعط جدول تغيرات الدالة f.**
5. **لتكن h قصور الدالة f على المجال $[1;+\infty[$.**

   أ. بين أن h تقابل من المجال $[1;+\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده.

   ب. حدد الدالة العكسية للدالة h لكل x من J.

تمرين 3

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$f(x)=x+\sqrt{x^2+1} .$$

1. **بين أنه لكل عدد حقيقي x لدينا: $f(x)>0$.**
2. **أحسب نهايات f عند محدات حيز تعريف الدالة f.**
3. **ادرس تغيرات الدالة f.**
4. **بين أن: $(\forall x\in\mathbb{R}):\ \frac{-1}{f(x)}=x-\sqrt{x^2+1}$.**
5. **بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J من $\mathbb{R}$ يجب تحديده.**
6. **حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J.**
7. **استنتج تغيرات الدالة f^{-1}.**

تمرين 4

نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي:

$$h(x)=x^3-3x-1 .$$

1. **ادرس تغيرات الدالة h.**

2. بين أن المعادلة $(E): \ h(x)=0$ تقبل ثلاث حلول حقيقية.
3. احسب $\cos 3\alpha$ بدلالة $\cos\alpha$.
4. نضع $x=2\cos\alpha$ ، استنتج الجذور الثلاث للمعادلة (E) على شكلها المثلثي.

تمرين 5

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$.
2. ادرس زوجية الدالة f.
3. ادرس رتابة الدالة f على $\mathbb{R}^+$ ثم استنتج رتابتها على $\mathbb{R}$.
4. بين أن f تقابل من $\mathbb{R}$ نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد الدالة العكسية f^{-1}.

تمرين 6

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}.$$

1. حدد D_f.
2. أحسب نهايات f عند محدات D_f.
3. بين أن f تناقصية قطعا على $]-1;0[$.
4. بين أن f تقابل من $]-1;0[$ نحو مجال J يجب تحديده.
5. حدد f^{-1}.

تمرين 7

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$$f(x)=x+2\sqrt{x-3}-2.$$

1. حدد D_f.
2. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. ادرس قابلية اشتقاق f على يمين 3.
4. بين أن: $\forall x\in D_f; \quad f(x)=\left(\sqrt{x-3}+1\right)^2$.
5. اعط تغيرات الدالة f.
6. بين أن f تقابل من D_f نحو مجال J يجب تحديده.
7. حدد تعبير $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

تمرين 8

بين أن المعادلة:

$$\theta\in\ ]0;\pi[\ ;\ \cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$$

تقبل حلا على الأقل.

تمرين 9

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}, & x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1. ادرس اتصال الدالة f في $x_0=0$.
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$.
3. أول هندسيا النتيجة المحصل عليها.

تمرين 10

لتكن الدالة العددية المعرفة بما يلي:

$$f(x)=\frac{x^2-2x+3}{|x-2|-2}.$$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.
2. ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة $x_0=2$.
3. اعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة عليها.

تمرين 11

نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $g(x)=2x^3-5x^2-3$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $\left]\frac{5}{2};3\right[$.

تمرين 12

لتكن f و g دالتين معرفتين على مجال $[a;b]$ حيث $a<b$.

نفترض أن:

- f و g متصلتان على $[a;b]$ و قابلتان للاشتقاق على $]a;b[$.
- $\forall x\in\ ]a;b[\quad |f'(x)|\le g'(x)$.

1. بين أن g دالة تزايدية على $[a;b]$.

2. بين أن $(f-g)$ تناقصية على $[a;b]$، ثم استنتج أن :
$f(b)-f(a)\le g(b)-g(a)$.
3. بين أن $(f+g)$ تزايدية على $[a;b]$، ثم استنتج أن :
$-(f(b)-f(a))\le g(b)-g(a)$.
4. استنتج أن :
$|f(b)-f(a)|\le g(b)-g(a)$.

تمرين 13

لتكن f دالة عددية معرفة من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0=0$ بحيث $f(0)=0$ و $f'(0)=1$.
حدد النهاية التالية:
$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\times f(2x)\times\cdots\times f(nx)}{x^n}$ $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$.

تمرين 14

بين أنه يوجد عدد وحيد α من المجال $\left]0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ حيث:
$1-\sin\alpha=\alpha$.

تمرين 15

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:
$f(x)=2\sqrt{x}-x$.
1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محدات D_f .
3. احسب: $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$.
4. ضع جدول تغيرات الدالة f .
5. لتكن g قصور الدالة f على المجال $[0;1]$.
   a. بين أن g تقابل من المجال $[0;1]$ نحو مجال J يجب تحديده.
   b. حدد تعبير g^{-1} .

تمرين 16

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:
$f(x)=\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.
1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. أحسب نهايات f عند محدات D_f .
3. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:
$\left(\forall x\in D_f\right):\quad f(x)=a+\dfrac{b}{1-\sqrt{x}}$.
4. بين أن f تزايدية قطعا على المجال $[0;1[$.
5. ليكن g قصور الدالة f على المجال $[0;1[$.
   a. بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} .
   b. حدد مجموعة تعريف g^{-1} .
   c. حدد تعبير g^{-1} .

تمرين 17

نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $f(x)=tgx-x-1$.
1. بين أن f متصلة على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
2. بين أن f تزايدية قطعا على $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. حدد صورة المجال $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[$ بالدالة f .
4. استنتج أن:
$\left(\exists!\alpha\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right[\right):\quad tg\alpha=\alpha+1$.

تمرين 18

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:
$f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.
1. حدد حيز تعريف الدالة f .
2. بين أن f دالة زوجية.
3. بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في $x_0=0$.

تمرين 19

لتكن f دالة متصلة على المجال $[0;1]$ بحيث:
$\forall x\in[0;1],\quad 1<f(x)\le 2$.
ولتكن g الدالة المعرفة على المجال $[0;1]$ بما يلي:
$\forall x\in[0;1],\quad g(x)=xf(x)-1$.
1. بين أن g متصلة على المجال $[0;1]$.
2. حدد إشارة كل من $g(0)$ و $g(1)$.
3. استنتج أن: $\exists c\in]0;1[\quad f(c)=\dfrac{1}{c}$.

تمرين 20

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي:

$f(x)=x-\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}$.

1. **تحقق من أن:**

$\forall x>0 \quad f(x)=x\left(1-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$.

2. **احسب:** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
3. **ليكن x و y من $[1;+\infty[$ بحيث $x<y$.**
   قارن $f(x)$ و $f(y)$ ثم استنتج رتابة f على $[1;+\infty[$.
4. **بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[1;+\infty[$.**
5. **بين أن α يحقق:** $\alpha^3-4\alpha^2-\alpha=0$.
6. **استنتج قيمة α .**

تمرين 21

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:

$f(x)=\cos^3 x-3\cos x+2$.

1. **بين أن:** $\left(\forall x\in[0;\pi]\right): \quad f'(x)=3\sin^3 x$.
2. **استنتج تغيرات الدالة f على المجال $[0;\pi]$.**
3. **بين أن:** $\exists!\alpha\in\,]0;\pi[\quad f(\alpha)=\sqrt{2}$.

تمرين 22

لتكن f دالة عددية متصلة على المجال $[0;1]$ حيث:

$f(0)=0$ **و** $f(1)=1$.

بين أن: $\exists c\in\,]0;1[\quad f(c)=\frac{1-c}{1+c}$.

تمرين 23

بين أن المعادلة $x^3+4x+2=0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$.