حلول الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا – الدورة العادية 2017
مادة الرياضيات ـ شعبة العلوم التجريبية بمسالكها

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

التمرين الأول :

1ـ أـ لتكن : $ax+by+cz+d=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P) و بما ان : $\vec{u}(1,0-1)$ متجهة منظمية على المستوى (P) فان : $a=1$ و $b=0$ و $c=-1$ و منه معادلة المستوى (P) تصبح : $x-z+d=0$ وبما ان : المستوى (P) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ فان : $0-1+d=0$ أي ان : $d=1$ و منه فان : $x-z+1=0$ معادلة ديكارتية للمستوى (P).
1ـ بـ + لنحسب مسافة النقطة $\Omega(0,1,-1)$ عن المستوى $(P):\ x-z+1=0$ لدينا : $d(\Omega,(P))=\frac{\lvert x_\Omega-z_\Omega+1\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ يعني : $d(\Omega,(P))=\frac{\lvert 0-(-1)+1\rvert}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}$ أي : $d(\Omega,(P))=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$ و بما ان شعاع الفلكة (S) هو : $R=\sqrt{2}$ و ان : $d(\Omega,(P))=\sqrt{2}$ أي : $d(\Omega,(P))=R=\sqrt{2}$ فان : المستوى (P) مماس للفلكة (S). + لنتحقق من ان النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S) ▪ لنتحقق من كون $B\in(P)$: $-1-0+1=0$ أي ان : $0=0$ اذن : $B\in(P)$ ▪ لنتحقق من كون $B\in(S)$: لدينا مركز الفلكة (S) هو $\Omega(0,1,-1)$ و شعاعها $R=\sqrt{2}$ أي ان : $(S):\ (x-0)^2+(y-1)^2+(z-(1))^2=\sqrt{2}^2$ أي ان : $(S):\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$ و لدينا : $(-1)^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي أن : $2=2$ اذن : $B\in(S)$ ومنه فان : النقطة $B(-1,1,0)$ هي نقطة تماس (P) و (S).
2ـ أ – لدينا : المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(0,1,1)$ و بما ان : $(\Delta)\perp(P)$ فان : $\vec{u}(1,0,-1)$ متجهة موجهة للمستقيم (P) فان : $\begin{cases}x=0+1t\\y=1+0t\\z=1-1t\end{cases}\ ;\ (t=IR)$ تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ).
2ـبـ ولدينا : $d(\Omega,(\Delta))=\frac{\lVert\overrightarrow{\Omega A}\wedge\vec{n}\rVert}{\lVert\vec{n}\rVert}=\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{2}=R$ و منه (Δ) مماس للفلكة (S) لدينا : $(S):\ x^2+(y-1)^2+(z+1)^2=2$ و $C(1,1,0)$ و بما أن : $1^2+(1-1)^2+(0+1)^2=2$ أي $2=2$ فان : $C\in(S)$ و لدينا من جهة أخرى : $(\Delta):\begin{cases}x=0+1t\\y=1+0t\\z=1-1t\end{cases}$ و $\begin{cases}1=0+1t\\1=1+0t\\0=1-1t\end{cases}$ أي $\begin{cases}t=1\\1=1\\t=1\end{cases}$ و منه : $C\in(\Delta)$ و بالتالي (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة $C(1,1,0)$
3ـ + حساب $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}$

لدينا : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\vec{k}$ اذن : $\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}=2\vec{k}$

+ حساب مساحة المثلث OCB

لدينا : $S_{OCB}=\dfrac{\left\|\overrightarrow{OC}\wedge\overrightarrow{OB}\right\|}{2}=\dfrac{2}{2}$ اذن : $S_{OCB}=1$

التمرين الثاني :

1ـ لدينا : $p(A)=\dfrac{cardA}{card\Omega}=\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=\dfrac{20}{56}=\dfrac{5}{14}$ و : $p(B)=\dfrac{cardB}{card\Omega}=\dfrac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\dfrac{4}{56}=\dfrac{1}{7}$

2ـ أ ـ لدينا : $p(X=16)=\dfrac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$

2ـ ب ـ

القيم التي يأخذها X : $X(\Omega)=\{0,4,8,16\}$

لدينا : $p(X=0)=1-p(\overline{X=0})=1-\dfrac{C_6^3}{C_8^3}=1-\dfrac{20}{56}=\dfrac{36}{56}=\dfrac{9}{14}$

و : $p(X=4)=\dfrac{C_4^2\times C_1^1}{C_8^3}=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$

و : $p(X=8)=\dfrac{C_4^3+C_1^1\times C_4^1\times C_1^1}{C_8^3}=\dfrac{8}{56}=\dfrac{1}{7}$

و : $p(X=16)=\dfrac{6}{56}=\dfrac{3}{28}$ (حسب نتيجة السؤال السابق)

وبالتالي :

$X=x_i$	0	4	8	16
$p(X=x_i)$	$\dfrac{9}{14}$	$\dfrac{3}{28}$	$\dfrac{1}{7}$	$\dfrac{3}{28}$

التمرين الثالث :

1ـأـ لدينا : $(1+i)a=(1+i).(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}+i+\sqrt{3}i-1=\sqrt{3}-1+i(\sqrt{3}+1)=b$

اذن : $b=(1+i)a$

1ـبـ لدينا : $b=(1+i)a$ يعني : $|b|=|(1+i).a|=|1+i|\times|a|=\sqrt{1^2+1^2}\times\sqrt{\sqrt{3}^2+1^2}=2\sqrt{2}$

لدينا : $\arg b\equiv\arg[(1+i).a]\equiv\arg(1+i)+\arg(a)$

- ولدينا : $1+i=\sqrt{2}.(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2})=\sqrt{2}.(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4})$ أي أن : $\arg(1+i)\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$
- و : $a=2(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+i\dfrac{1}{2})=2.(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6})$ أي أن : $\arg(a)\equiv\dfrac{\pi}{6}[2\pi]$

وبالتالي : $\arg b\equiv(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{6})[2\pi]\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$

1ـجـ لدينا : $b=\sqrt{3}-1+(\sqrt{3}+1)i$ و : $|b|==2\sqrt{2}$ يعني : $b=2\sqrt{2}.(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}+i\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}})$

يعني : $b=2\sqrt{2}.(\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}+i\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4})$ وبماأن : $\arg b\equiv\dfrac{5\pi}{12}[2\pi]$ فان : $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2ـ أـ لدينا : $ia=i.(\sqrt{3}+i)=\sqrt{3}i+i^2=-1+\sqrt{3}i$ اذن : $c=ia$

لدينا : $c=ia$ يعني أن : $\frac{c}{a}=i$ يعني أن : $\begin{cases} \left|\frac{c}{a}\right|=1 \\ \frac{c}{a}=1.(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}) \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} |c|=|a| \\ \arg\frac{c}{a}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} |c-o|=|a-o| \\ \arg\frac{c-o}{a-o}\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$ اذن : $\begin{cases} OA=OC \\ (\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$

2ـبـ تذكران : ليكن z لحق نقطة M من المستوى العقدي و z' لحق النقطة M' صورة M بالازاحة T التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$. يعني : $T(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OC} \Leftrightarrow z'-z=c$

لدينا : + لحق المتجهة $\overrightarrow{OC}$ هو : $Aff(\overrightarrow{OC})=c=ia$

+ لحق المتجهة $\overrightarrow{AB}$ هو : $Aff(\overrightarrow{AB})=b-a=(1+i).a-a=ia$

اذن : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$ أي : $b-a=c$

و منه فان : النقطة B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$.

2ـجـ لدينا : B هي صورة النقطة A الازاحة التي متجهتها $\overrightarrow{OC}$ يعني : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}$

أي ان : $OABC$ متوازي أضلاع

و بما أن : $OA=OC$ و ان : $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ (حسب نتيجة السؤال 2ـأ)

فان : $OABC$ مربع.

المسألة :

Iـ 1ـ لدينا : $g(x)=x^2+x-2+2\ln x$ و : $D_g=]0,+\infty[$ و : $1\in]0,+\infty[$

يعني : $g(1)=1^2+1-2+2\ln 1$ اذن : $g(1)=0$

2ـ ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، يعني : $x\in]0,1]$ أو $x\in[1,+\infty[$

- اذا كان : $x\in]0,1]$: لدينا $x\le 1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x)\le g(1)$

  و منه فان : $g(x)\le 0$ $\forall x\in]0,1]$

- اذا كان : $x\in[1,+\infty[$: لدينا $x\ge 1$ و بما أن g تزايدية حسب جدول التغيرات فان : $g(x)\ge g(1)$

  و منه فان : $g(x)\ge 0$ $\forall x\in[1,+\infty[$

IIـ 1ـ لدينا : $\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+} x+(1-\frac{2}{x})\ln x$

و بما أن : $\lim_{x\to0^+} x=0$ و $\lim_{x\to0^+} 1-\frac{2}{x}=-\infty$ و $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

فان : $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$

بما ان $\lim_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ فان : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب عمودي للمنحنى (C) على يمين 0.

2ـ أـ لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x+(1-\frac{2}{x})\ln x$

$=\lim_{x\to+\infty} x+\ln x-2\frac{\ln x}{x}$

و بما أن : $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

فان : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2ـبـ لدينا : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

ولدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{\ln x}{x}-2\frac{\ln x}{x^2}$ وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2}=0$

فان : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

ولدينا من جهة اخرى : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\frac{2}{x})\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x-2\frac{\ln x}{x}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

فان : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)-x=+\infty$

ومنه فان : المنحنى (C) يقبل فرعا شلجميا اتجاهه المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ بجوار $+\infty$

3ـأ- ليكن x عنصرا من المجال $]0,+\infty[$ ، ولدينا : $f(x)=x+(1-\frac{2}{x})\ln x$

اذن : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+(1-\frac{2}{x}).\frac{1}{x}$ يعني : $f'(x)=1+\frac{2}{x^2}\ln x+\frac{x-2}{x^2}$

يعني : $f'(x)=\frac{x^2++x-2+2\ln x}{x^2}$ اذن : $\forall x\in]0,+\infty];\quad f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$

3ـبـ لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[;\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ و : $\forall x\in]0,+\infty];\ x^2\succ 0$

اذن اشارة f' هي نفسها اشارة $g(x)$ لكل $x\in]0,+\infty]$

وحسب نتيجة السؤال (I-2) :

لدينا : $\forall x\in]0,1]\quad g(x)\le 0$ ومنه : $\forall x\in]0,1];\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\le 0$ اذن : f تناقصية على $]0,1]$

ولدينا : $\forall x\in[1,+\infty[\quad g(x)\ge 0$ ومنه : $\forall x\in[1,+\infty[\ f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}\ge 0$ اذن : f تزايدية على $[1,+\infty[$

3ـج

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

4ـأ- لدينا : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $\ln x=0$ أو $1-\frac{2}{x}=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

اذن مجموعة حلول المعادلة $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ على المجال $]0,+\infty[$ هي : $S=\{1,2\}$

لاحظ ان : $1\in]0,+\infty[$ و ان : $2\in]0,+\infty[$

4ـب ـ لدينا : $f(x)=x$ يعني : $(1-\frac{2}{x})\ln x=0$ يعني : $x=1$ أو $x=2$

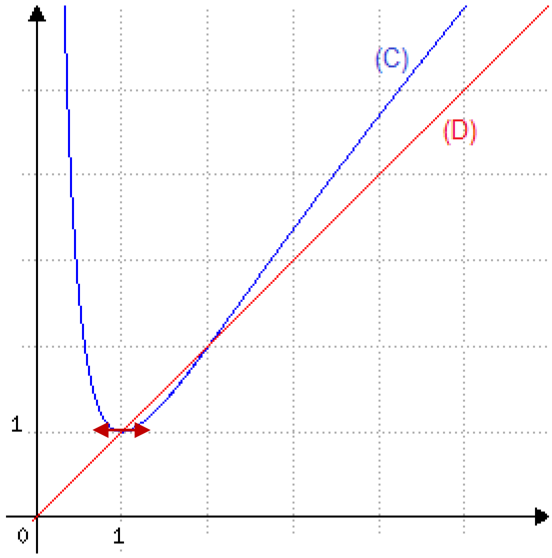
ومنه المنحنى (C) يقطع المستقيم (D) في نقطتين هما : $M(1,1)$ و $N(2,2)$

4ـج لدينا : $\forall x\in]0,+\infty[\ ;\ f(x)-x=(1-\frac{2}{x})\ln x=\frac{x-2}{x}.\ln x$

وبما أن : $\forall x\in[1,2]\ \ln x\ge 0$ و $\forall x\in[1,2]\ x-2\le 0$ و $\forall x\in[1,2]\ x\ge 0$

فان : $\forall x\in[1,2]\ \frac{x-2}{x}.\ln x\le 0$ أي ان : $\forall x\in[1,2]\quad f(x)-x\le 0$

وبالتالي فان : $\forall x\in[1,2]\quad f(x)\le x$

بما أن : $f(x) \le x$ $\forall x \in [1,2]$ فان المنحنى (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $[1,2]$
5ـ تمثيل المنحنى (C) و المستقيم (D) في نفس المعلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$ 
6ـأ. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^2 \frac{1}{x}.\ln x.dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 = \frac{(\ln 2)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}.(\ln 2)^2$
6ـب. لدينا : $H(x) = 2\ln x - x$ و $h(x) = \frac{2}{x} - 1$ لدينا : H دالة متصلة على المجال $]0,+\infty[$ (لأنها مجموع دوال متصلة على $]0,+\infty[$) و لدينا : $H'(x) = (2\ln x - x)' = \frac{2}{x} - 1$ يعني : $H'(x) = h(x)$ اذن : H دالة أصلية للدالة h على المجال $]0,+\infty[$.
6ـج. لدينا : $\int_1^2 (\frac{2}{x} - 1)\ln xdx = [(2\ln x - x).\ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{2\ln x - x}{x}dx = (2\ln 2 - 2).\ln 2 - 2\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx + [x]_1^2$ يعني : $\int_1^2 (\frac{2}{x} - 1)\ln xdx = 2(\ln 2)^2 - 2\ln 2 - (\ln 2)^2 + 1 = (\ln 2)^2 - 2\ln 2 + 1$ اذن : $\int_1^2 (\frac{2}{x} - 1)\ln xdx = (\ln 2 - 1)^2 = (1 - \ln 2)^2$
6ـد. لتكن $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المحصور بين المنحنى (C) و المستقيم (D) و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$. لدينا : $\mathcal{A} = \int_1^2 \|f(x) - x\|dx$ و حسب نتيجة السؤال (II – 4ـج) : $f(x) \le x$ $\forall x \in [1,2]$ أي أن : $f(x) - x \le 0$ $\forall x \in [1,2]$ أي ان : $\|f(x) - x\| = -(f(x) - x) = (\frac{2}{x} - 1).\ln x$ $\forall x \in [1,2]$ و منه : $\mathcal{A} = \int_1^2 (\frac{2}{x} - 1)\ln xdx = (1 - \ln 2)^2 cm^2$
III ـ1 ـ بالنسبة ل $n = 0$: لدينا $u_0 = \sqrt{3}$ و منه $1 \le u_0 \le 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n = 0$) نفترض أن : $1 \le u_n \le 2$ و نبين ان $1 \le u_{n+1} \le 2$ لدينا : $1 \le u_n \le 2$ أي أن : $u_n \in [1,2] \subset]1,+\infty[$ و بما أن : f تزايدية على $]1,+\infty[$ و $u_{n+1} = f(u_n)$ فان : $f(1) \le f(u_n) \le f(2)$ اي أن : $1 \le u_{n+1} \le 2$ (العبارة صحيحة لأجل $n + 1$)

	و بالتالي : $\forall n \in IN\ ;\ 1 \le u_n \le 2$
2ـ	لدينا حسب نتيجة السؤال (II.4ـج) : $\forall x \in [1,2]\ ;\ f(x) \le x$ و لدينا من جهة أخرى : $\forall n \in IN\ ;\ 1 \le u_n \le 2$ أي أن : $\forall n \in IN\ ; u_n \in [1,2]$ اذن : $\forall n \in IN\ ;\ f(u_n) \le u_n$ يعني : $\forall n \in IN\ ;\ u_{n+1} \le u_n$ و بالتالي فان المتتالية (u_n) تناقصية
3ـ	+ لدينا : $\forall n \in IN\ ;\ 1 \le u_n \le 2$ يعني ان المتتالية (u_n) مصغورة بالعدد 1 و بما أن المتتالية (u_n) تناقصية فانها متقاربة. + لدينا f متصلة على المجال $]0,+\infty[$ و بالخصوص على المجال $[1,2]$ و : $f([1,2]) = [1,2]$ أي ان : $f([1,2]) \subset [1,2]$ و بما أن (u_n) متقاربة و $u_0 \in [1,2]$ فان النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق : $f(l) = l$ و حسب نتيجة السؤال (II.4ـب) : $l = 1$ أو $l = 2$ و بما أن (u_n) تناقصية فان : $\forall n \in IN\ ;\ u_n \le u_0$ أي : $\forall n \in IN\ ;\ u_n \le \sqrt{3}$ أي $\lim_{n \to +\infty} u_n \le \sqrt{3}$ و بالتالي فان : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$

التصحيح من انجاز الأستاذ مبارك هندا

Phy.handa@gmail.com

GSM : 0661931283