.01

ندرس اتصال الدالة f في x_0 ؟ (وذلك في النقطة x_0 إذا كان ذلك ممكنا و إذا لم يكن ممكن على اليمين أو اليسار) .

.01 $\begin{cases} f(x)=\dfrac{(x-2)(x^2+1)}{x^2-3x+2} & ; x\in\mathbb{R}\setminus\{1,2\} \\ f(2)=5 \end{cases}$ ندرس اتصال في $x_0=2$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 2} f(x) &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+1)}{x^2-3x+2}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}\\ &=\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+1)}{(x-1)}\\ &=5\\ &=f(2)\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to 2} f(x)=f(2)$

خلاصة : الدالة f متصلة في $x_0=2$.

.02 $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1} & ; x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ f(1)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$ ندرس اتصال في $x_0=1$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1} f(x) &= \lim_{x\to 1}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{x+1-2}{x^2-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\\ &=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة في $x_0=1$.

.03
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} & ; x\in[2,+\infty[\setminus\{4\} \\ f(4)=\dfrac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$
ندرس اتصال في $x_0=4$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4} f(x) &= \lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}\\
&= \lim_{x\to4}\frac{(2x+1-9)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-2-2)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}\\
&= \lim_{x\to4}\frac{2\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}\\
&= \lim_{x\to4}\frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2x+1}+3}\\
&= \frac{2\sqrt{2}}{3}\\
&= f(4)\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to4} f(x)=f(4)$

خلاصة : الدالة f متصلة في $x_0=4$.

.04
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1} & ; x\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\} \\ f(-1)=-\dfrac{1}{2} \end{cases}$$
ندرس اتصال في $x_0=-1$.

- اتصال f على يمين $x_0=-1$

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-1^+} f(x) &= \lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\\
&= \lim_{x\to-1^+}\frac{x+1-2}{x^2-1}\\
&= \lim_{x\to-1^+}\frac{x-1}{x^2-1}\\
&= \lim_{x\to-1^+}\frac{1}{x+1} \qquad ; \left(\lim_{x\to-1^+} x+1=0^+\right)\\
&= +\infty\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يمين $x_0=-1$.

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0=-1$.

- اتصال f على يسار $x_0=-1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^-} f(x) &= \lim_{x\to -1^-} \frac{1}{x-1}-\frac{2}{x^2-1}\\ &= \lim_{x\to -1^-}\frac{1}{x+1} \qquad ; \left(\lim_{x\to -1^-} x+1=0^-\right)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to -1^-} f(x)=-\infty$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0=-1$.

05. $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{x}} \; ; x>1 \\ f(x)=\dfrac{2\sin(x-1)}{x-1} \; ; x<1 \\ f(1)=2 \end{cases}$ ندرس اتصال في $x_0=1$.

- اتصال f على يمين $x_0=-1$ ؛ لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+} f(x) &= \lim_{x\to 1^+}\frac{\sin(x^2-1)}{\sqrt{x}}\\ &= 0 \qquad ; \left(\lim_{x\to 1^+}\sin(x^2-1)=0 \;;\; \lim_{x\to 1^+}\sqrt{x}=1\right)\\ &\neq f(1) \qquad ; (f(1)=2)\end{aligned}$$

ومنه : $\lim_{x\to 1^+} f(x)\neq f(1)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يمين $x_0=1$.

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0=1$.

- اتصال f على يسار $x_0=1$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} f(x) &= \lim_{x\to 1^-}\frac{2\sin(x-1)}{x-1}\\ &= \lim_{t\to 0^-}\frac{2\sin t}{t} \qquad ; \left(t=x-1 \;;\; (x\to 1^-)\Rightarrow(t\to 0^-)\right)\\ &= 2 \qquad ; \left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\right)\\ &= f(1)\end{aligned}$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = f(1)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0 = 1$.

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$ لأنها غير متصلة على يسار $x_0 = 1$.

.06 $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1+\cos x}{\sin x} & ; \ x \in]-\pi,\pi[\\ f(x) = x + \dfrac{\sqrt{x^2-\pi^2}}{x} & ; \ x \in]-\infty,-\pi] \cup [\pi,+\infty[\end{cases}$ ندرس اتصال في $x_0 = \pi$.

- اتصال f على يمين $x_0 = \pi$

لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi^+} f(x) &= \lim_{x\to\pi^+} x + \frac{\sqrt{x^2-\pi^2}}{x} \\ &= \pi && ; \left(\lim_{x\to\pi^+} x^2-\pi^2 = 0 \ ; \ \lim_{x\to\pi^+} x = \pi\right) \\ &= f(\pi) && ; \left(f(\pi) = \pi\right) \end{aligned}$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to\pi^+} f(x) = f(\pi)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يمين $x_0 = \pi$.

- اتصال f على يسار $x_0 = \pi$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pi^-} f(x) &= \lim_{x\to\pi^-} \frac{1+\cos x}{\sin x} && ; \ \cos x = \cos\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \ ; \ \sin x = \sin\left(2\frac{x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= \lim_{t\to\pi^-} \frac{2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)} \\ &= \lim_{t\to\pi^-} \frac{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} && ; \left(\lim_{t\to\pi^-} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = 1 \ ; \ \lim_{t\to\pi^-} \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 0\right) \\ &= 0 && ; \left(f(\pi) = \pi\right) \\ &\neq f(\pi) \end{aligned}$$

ومنه : $\lim\limits_{x\to\pi^-} f(x) \neq f(\pi)$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0 = \pi$.

ملحوظة : الدالة f غير متصلة في $x_0 = 1$ لأنها غير متصلة على يسار $x_0 = 1$.

ملحوظة : يمكنك حساب النهاية على اليسار بطريقة أخرى

$$\lim_{x\to\pi^-} f(x) = \lim_{x\to\pi^-}\frac{1+\cos x}{\sin x} \quad ; \left(x=\pi-t \ ; \ \left(x\to\pi^-\right)\Rightarrow\left(t\to 0^+\right)\right)$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{1+\cos(\pi-t)}{\sin(\pi-t)} \quad ; \ \left(\cos(\pi-t)=-\cos t \ ; \ \sin(\pi-t)=\sin t\right)$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos t}{\sin t}$$
$$= \lim_{t\to 0^+}\frac{1-\cos t}{t}\times\frac{t}{\sin t} \quad ; \left(\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0 \ ; \ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\right)$$
$$= 0\times 1$$
$$= 0 \quad ; \left(f(\pi)=\pi\right)$$
$$\neq f(\pi)$$

خلاصة : الدالة f غير متصلة على يسار $x_0=\pi$.

.02

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة ب:
$$\begin{cases} f(x)=x+a\sqrt{x^2+x+1} & ; x\leq 0 \\ f(x)=x^2\text{-}x & ; 0<x\leq 1 \\ f(x)=bx-\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & ; x>1 \end{cases}$$.

01. نحدد a و b لكي تكون f متصلة في 0 و 1 .

- اتصال f في $x_0=0$. (مع $f(0)=0+a\sqrt{0^2+0+1}=a$)

- على يمين $x_0=0$.

$\lim_{x\to 0^+} x^2-x=0$ و $f(0)=a$ إذن لكي تكون f متصلة على يمين $x_0=0$ يجب $\lim_{x\to 0^+} x^2-x=0=a$ و منه : $a=0$.

- على يسار $x_0=0$.

$\lim_{x\to 0^-} x+a\sqrt{x^2+x+1}=a=f(0)$ إذن f متصلة على يسار $x_0=0$.

وبالتالي : لكي تكون f متصلة في $x_0=0$ يجب أن يكون $a=0$.

- اتصال f في $x_0=1$. (مع $f(0)=0+a\sqrt{0^2+0+1}=a$)

- على يمين $x_0=1$.

لدينا :

$$\lim_{x\to1^+} bx-\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}=\lim_{x\to1^+} bx-\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}$$
$$=\lim_{x\to1^+} bx-\frac{(x-1)\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\to1^+} bx-\frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x^2+3}+2\right)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}$$
$$=b-2$$

و $f(1)=1^2-1=0$ إذن لكي تكون f متصلة على يمين $x_0=1$ يجب $\lim_{x\to1^+} f(x)=b-2=0$ و منه : $b=2$.

- على يسار $x_0=1$.

$\lim_{x\to1^-} x^2-x=0=f(1)$ إذن f متصلة على يسار $x_0=1$.

وبالتالي : لكي تكون f متصلة في $x_0=1$ يجب أن يكون $b=2$.

خلاصة : لكي تكون f متصلة في 0 و 1 يجب : $a=0$ و $b=2$.

.02 نحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

- نحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2x-\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} \qquad ; \quad (b=2)$$
$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(2-\frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x^2+3}-2}\right) \qquad ; \left(\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}=1\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+3}-2=+\infty\right)$$
$$=+\infty$$

ومنه : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

- نحسب : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x+a\sqrt{x^2+x+1} \qquad ; \quad (a=0)$$
$$=\lim_{x\to-\infty} x$$
$$=-\infty$$

ومنه : $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

03.

هل يمكن تمديد بالاتصال الدوال التالية في النقطة x_0 .

01. $f(x)=\frac{2x^2-x-1}{2x+1}$ في $x_0=-\frac{1}{2}$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) &= \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{2x^2-x-1}{2x+1}\\ &= \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{(x-1)\cancel{(2x+1)}}{\cancel{2x+1}}\\ &= \lim_{x\to-\frac{1}{2}} x-1\\ &= -\frac{3}{2}\end{aligned}$$

خلاصة : يمكن تمديد بالاتصال الدالة f في النقطة $x_0=0$.

حيث تمديد بالاتصال ل f في النقطة $x_0=-\frac{1}{2}$ هي الدالة g المعرفة ب : $\begin{cases} g(x)=\frac{2x^2-x-1}{2x+1} & ; \ x\neq-\frac{1}{2}\\ g\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{2}\end{cases}$.

ملحوظة : كذلك الدالة h المعرفة ب : $h(x)=x-1$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0=-\frac{1}{2}$

02. $f(x)=\frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}$ في $x_0=0$.

لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0} f(x) &= \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x}\\ &= \lim_{x\to0} \frac{\left(\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}\right)\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\\ &= \lim_{x\to0} \frac{4+x-(4-x)}{x\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\\ &= \lim_{x\to0} \frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}\right)}\\ &= \frac{1}{2} \qquad ; \quad \left(\lim_{x\to0}\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}=4\right)\end{aligned}$$

خلاصة : يمكن تمديد بالاتصال الدالة f في النقطة $x_0=0$.

حيث تمديد بالاتصال ل f في النقطة $x_0 = 0$ هي الدالة g المعرفة ب :

$$\begin{cases} g(x) = \dfrac{\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}}{x} \quad ; \quad x \in [-4;0[\cup]0;4] \\ g(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

ملحوظة : كذلك الدالة h المعرفة ب : $h(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4+x}+\sqrt{4-x}}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = 0$

.04

لنعتبر الدالة $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ متصلة و جدول تغيراتها كالتالي :

x	$-\infty$	-5	0	1	3	10	$+\infty$
$f(x)$	1 ↘	-5 ↗	3 ↘	-10 ↗	3 ↘	2 ↗	$+\infty$

01. ما هو عدد حلول المعادلة : $x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$.

- هناك حل على المجال : $]-\infty;-5]$ أو المجال $]-\infty;-5[$.
- هناك حل على المجال : $[-5;0]$ أو $]-5;0[$ أو ....
- هناك حل على المجال : $[0;1]$ أو ......
- هناك حل على المجال : $[1;3]$ أو ......

خلاصة : المعادلة $x \in \mathbb{R} / f(x) = 0$ لها 4 حلول .

02. ما هو عدد حلول المعادلة : $x \in [0,10] / f(x) = 2$.

- هناك حل على المجال : $[0;1]$ أو ......
- هناك حل على المجال : $[1;3]$ أو ......
- هناك حل على المجال : $[3;10]$.
- هناك حل على المجال : $[10;+\infty[$.

خلاصة : المعادلة $x \in \mathbb{R} / f(x) = 2$ لها 4 حلول .

03. حدد حل المعادلة : $x \in \mathbb{R} / f(x) = -10$.

الحل هو $x = 1$.

خلاصة : حل المعادلة : $x \in \mathbb{R} / f(x) = -10$ هو $x = 1$.

04. نحدد صور المجالات التالية بواسطة f : $]-\infty;-5]$ و $]-\infty,0]$ و $]-5,3]$ و $[1;3[$ و $]3;10[$ و $]0,+\infty[$ و $\mathbb{R}$.

لدينا :

- $f(]-\infty;-5]) = [-5;1[$.
- $f(]-\infty,0]) = [-5;3]$.
- $f(]-5,3]) = [-10;3]$.
- $f([1;3[) = [-10;3[$.
- $f(]3;10[) =]2;3[$.

- $f(]0,+\infty[)=[-10;+\infty[$.
- $f(\mathbb{R})=[-10;+\infty[$

05. هل الدالة f تقبل دالة عكسية من المجال I إلى $f(I)$. أ- $I=]-\infty,-5]$ ب- $I=]-\infty,0[$ ج- $[1,3]$.

- على المجال $I=]-\infty,-5]$.

- حسب المعطيات الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها متصلة على $I=]-\infty,-5]$.
- حسب جدول تغيرات الدالة f تناقصية قطعا على $I=]-\infty,-5]$.

خلاصة : قصور الدالة f تقبل دالة عكسية من المجال $I=]-\infty,-5]$ إلى $f(I)=[-5;1[$.

- على المجال $I=]-\infty,0[$.

- حسب المعطيات الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها متصلة على $I=]-\infty,0[$.
- حسب جدول تغيرات الدالة f ليست رتيبة قطعا على $I=]-\infty,0[$.

خلاصة : قصور الدالة f لا تقبل دالة عكسية من المجال $I=]-\infty,0[$ إلى $f(I)$.

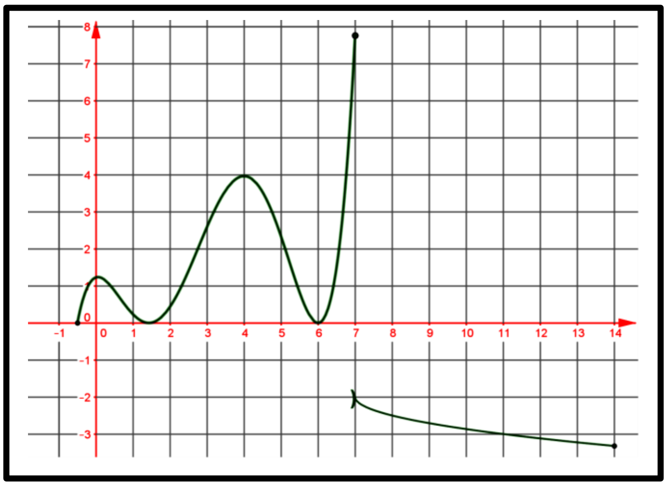
- على المجال $[1,3]$.

- حسب المعطيات الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها متصلة $[1,3]$.
- حسب جدول تغيرات الدالة f تزايدية قطعا على $[1,3]$.

خلاصة : قصور الدالة f تقبل دالة عكسية من المجال $[1,3]$ إلى $f(I)=]-10;3]$.

05.

لتكن f دالة عددية معرفة على $[-0,5;14]$ و الشكل التالي يمثل منحنها .



01. أعط نص أو منطوق مبرهنة القيم الوسيطية .

منطوق مبرهنة القيم الوسيطية :

> f دالة متصلة على القطعة $[a,b]$. $(a<b)$
>
> ▪ لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a,b]$ حيث : $f(c)=k$.

02. أوجد مجالين حيث يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية مع توضيح ذلك .

- يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية على المجال $[0;5]$ ؛مبيانيا الدالة f متصلة على $[0;5]$.
- يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية على المجال $[8;14]$ ؛مبيانيا الدالة f متصلة على $[8;14]$.

03. أوجد مجال حيث لا يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية مع توضيح ذلك .

- لا يمكن تطبيق مبرهنة القيم الوسيطية على المجال $[4;11]$ ؛ مبيانيا الدالة f غير متصلة على $[4;11]$ (لأنها غير متصلة في 7)

لدينا : $f(4)=4$ و $f(11)=-3$ نأخذ $k=-1$ هو محصور بين $f(4)=4$ و $f(11)=-3$ ولكن لا يوجد c من $[4;11]$ حيث $f(c)=-1$.

04. يمكن إيجاد عدد β وحيد حيث $f(\beta)=6$ تقاطع المنحنى و المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=6$ يحدد نقطة وحيدة ذلك ؟.

نعطي تأطير ل β ؛ مبيانيا $6,5<\beta<7$.

06.

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x)=x^2\cos^5 x+x\sin x+1$

01. نحسب : $f(0)$ و $f(\pi)$ ثم بين أن المعادلة : $x^2\cos^5 x+x\sin x+1=0$ تقبل حل الأقل حل على $\mathbb{R}$.

لدينا :

- الدالة f هي متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها مجموع و جداء دوال متصلة على $\mathbb{R}$ إذن الدوال f متصلة على $[0;\pi]$.
- $f(0)=1>0$ و $f(\pi)=-\pi^2+1<0$ لإذن $f(0)\times f(\pi)<0$ إذن 0 محصور بين $f(0)$ و $f(\pi)$

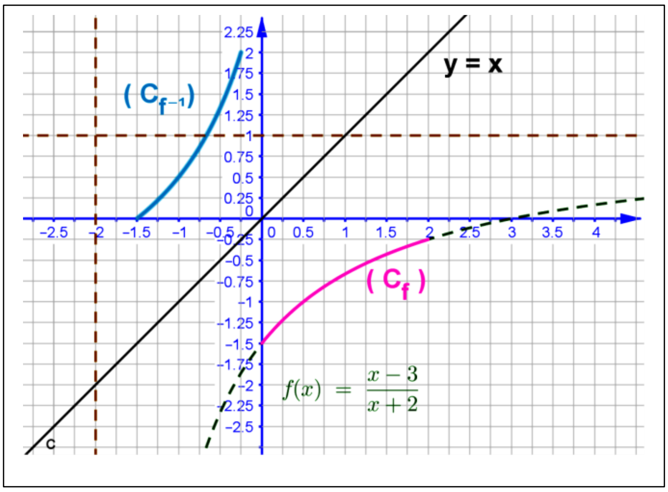
إذن حسب مبرهنة القيمة الوسيطية يوجد على الأقل c من $[0;\pi]$ حيث $f(c)=0$ و بالتالي $f(x)=0$ تقبل حل الأقل حل على $[0;\pi]$ ومنه $x^2\cos^5 x+x\sin x+1=0$ تقبل حل الأقل حل على $\mathbb{R}$.

خلاصة : المعادلة : $f(x)=0$ تقبل حل الأقل حل على $\mathbb{R}$.

07.

❖ لنعتبر f الدالة المعرفة على $[0,2]$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x-3}{x+2}$.

01. باستعمال دروس السنة الماضية أو باستعمال البَرْنَام geogebra (أو بَرْنَام آخر مثل Cabri2+) ننشئ منحنى f ثم استنتج أن f هي تقابل من $[0,2]$ نحو J حدده مبيانيا .



مبيانيا الدالة f متصلة و تزايدية قطعا على $[0,2]$ و $J=[-0,5;0,25]$

خلاصة : f هي تقابل من $[0,2]$ نحو $J=[-0,5;0,25]$

02.

- أنشئ في نفس المعلم منحنى الدالة العكسية f^{-1}. (أنظر الشكل)
- حدد f^{-1} الدالة العكسية ل F .

ليكن x من $[0,2]$ و y من $J=[-0,5;0,25]$

حيث $y=f(x)$ و $x=f^{-1}(y)$

$$f(x)=y \Leftrightarrow \frac{x-3}{x+2}=y$$
$$\Leftrightarrow x-3=xy+2y$$
$$\Leftrightarrow x-xy=3+2y$$
$$\Leftrightarrow x(1-y)=3+2y$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3+2y}{1-y}$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{3+2y}{1-y}=f^{-1}(y)$$

و منه : $f^{-1}(y)=\frac{3+2y}{1-y}$.

خلاصة : الدالة العكسية f^{-1} ل f هي : $f^{-1}\ :\ J=[-0,5;0,25]\to[0,2]$

$$x\mapsto f^{-1}(x)=\frac{3+2x}{1-x}$$

❖ لنعتبر $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ الدالة المعرفة ب : $f(x)=(x-4)^2+2$.

.01

أ- نحسب : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x-4)^2+2=+\infty$

ب- أدرس اتصال الدالة على المجموعة $\mathbb{R}$.

الدالة f هي متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها حدودية .

.02 بين أن : الدالة f تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$.

لدينا : $f'(x)=\left[(x-4)^2+2\right]'=2(x-4)'(x-4)=2(x-4)$ و منه : على $I=]-\infty,4[$ فإن $f'(x)<0$ الدالة f تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$. ملحوظة : يمكنك استعمال معدل تغيرات f لدراسة الرتابة .

خلاصة : الدالة f تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$.

.03 لنعتبر g قصور الدالة f على $I=]-\infty,4]$ بين أن : g تقابل من I إلى مجال J يتم تحدده .

- الدالة f هي متصلة على $\mathbb{R}$ إذن قصورها g هي متصلة على $I=]-\infty,4]$.
- الدالة f تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$ إذن قصورها g تناقصية قطعا على $I=]-\infty,4]$.

خلاصة : g قصور الدالة f على $I=]-\infty,4]$ هي g تقابل من I إلى مجال $J=f(]-\infty,4])=\left[g(4);\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)\right[=[2;+\infty[$

.04 نحدد للدالة العكسية g^{-1} للدالة g .

ليكن x من $I=]-\infty,4]$ و y من $J=[2;+\infty[$. مع $g(x)=y\Leftrightarrow x=g^{-1}(y)$.

لدينا :

$$g(x)=y \Leftrightarrow (x-4)^2+2=y$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2=y-2$$

$$\Leftrightarrow x-4=\sqrt{y-2} \;\vee\; x-4=-\sqrt{y-2}$$

بما أن : $x\in I=]-\infty,4]$ إذن $x\le 4$ ومنه $x-4\le 0$ بالنسبة ل $x-4=\sqrt{y-2}$ غير ممكن لأن :

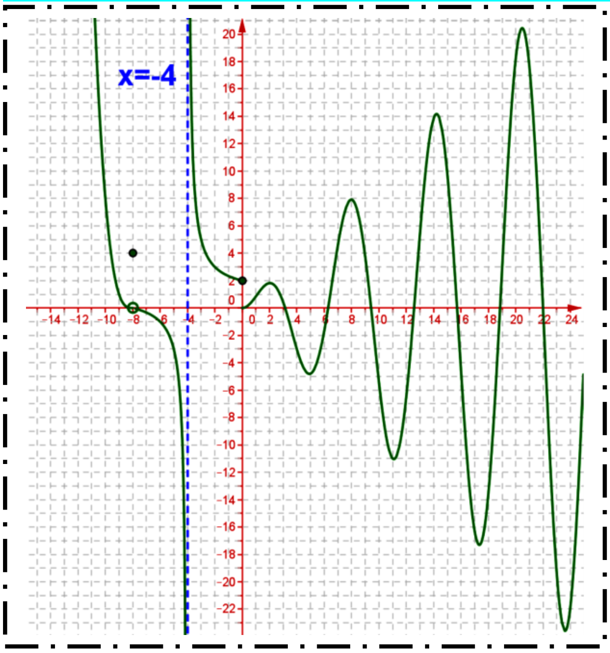
ومنه نأخذ $x-4=-\sqrt{y-2}$ إذن $x=4-\sqrt{y-2}$.

ومنه : $g^{-1}(y)=4-\sqrt{y-2}$.

خلاصة : للدالة العكسية g^{-1} : $g^{-1}:[2;+\infty[\to]-\infty,4]$ ، $y\mapsto g^{-1}(y)=4-\sqrt{y-2}$ و يمكن كتابة : $g^{-1}:[2;+\infty[\to]-\infty,4]$ ، $x\mapsto g^{-1}(x)=4-\sqrt{x-2}$

.08

نعتبر الدالة العددية f التي منحناها هو:



.01 حدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف f.

مبيانيا : مجموعة تعريف f هي $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$.

.02 استنتج مبيانيا: $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)$ ؛ $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-8} f(x)$.

لدينا :

- $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=2$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-8} f(x)=0$.
- بالنسبة لنهاية f عند $+\infty$ مبيانيا f ليس لها نهاية عند $+\infty$.

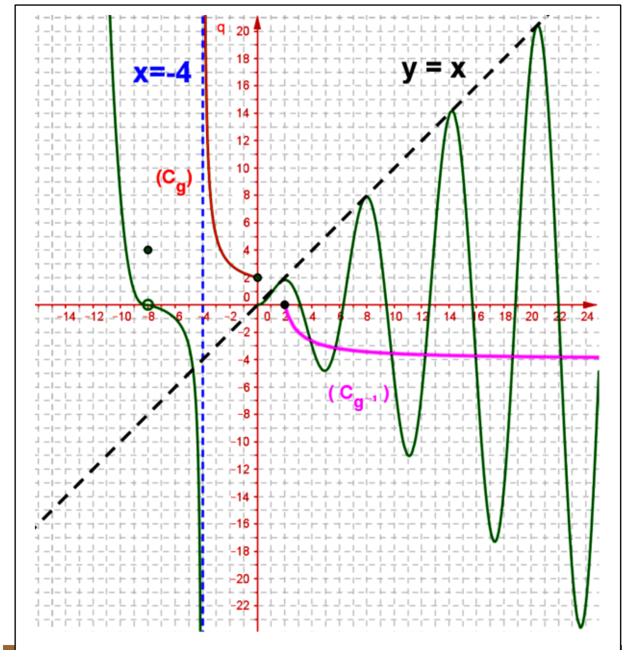
.03 أ ـ هل f متصلة على يمين 0 ؟ على يسار 0؟ : متصلة في $x_0=0$ ؟

- f غير متصلة على يمين 0 .
- f متصلة على يسار 0 .
- f غير متصلة في 0 .

ب ـ نعطي جدول تغيرات f $]-4;3]$.

x	4	0	3
$f(x)$	‖ $+\infty$ ↘	$f(0)=2$ ‖ 0	↗ 2

.04 ليكن g قصور الدالة f على المجال $I=]-4;0]$



أ ـ بين أن : g تقبل دالة عكسية g^{-1} من J إلى I مع تحديد J مبيانيا.

- مبيانيا الدالة g قصور الدالة هي متصلة على $I=]-4;0]$.
- مبيانيا الدالة g قصور الدالة هي تناقصية قطعا على $I=]-4;0]$.

خلاصة : g قصور الدالة f على $I=]-4;0]$ هي تقابل من $I=]-4;0]$ إلى مجال $f(]-4;0])=[2;+\infty[$

$J=f(]-\infty,4])=\left[g(4);\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)\right[=[2;+\infty[$

ب- أنشئ $\left(C_{g^{-1}}\right)$ منحنى f في نفس المعلم . (أنظر الشكل)

09.

نضع : $a=\sqrt[3]{41\sqrt{5}+54\sqrt{3}}$ و $b=\sqrt[3]{54\sqrt{3}-41\sqrt{5}}$

01. باستعمال المحسبة (الآلة الحاسبة) هل ab هو $\frac{1}{3}$ ؛ 1 ؛ 7 ؛ $\frac{7}{3}$.

خلاصة : باستعمال المحسبة : $ab=7$

10.

01. بين أن: و $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[12]{3^9\times2^8}=6$ و $\frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}}\sqrt{27}\times3^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[6]{3}\times\sqrt{3}}=9$ اجعل المقام عدد جذري: $\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}$.

- لدينا :

$$\begin{aligned}\sqrt[4]{3}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[12]{3^9\times2^8}&=\sqrt[4\times3]{3^3}\times\sqrt[3\times4]{2^4}\times\sqrt[12]{3^9\times2^8}\\&=\sqrt[12]{3^3\times2^4\times3^9\times2^8}\\&=\sqrt[12]{3^{12}\times2^{12}}\\&=\sqrt[12]{(2\times3)^{12}}=6\end{aligned}$$

خلاصة : $\sqrt[4]{3}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[12]{3^9\times2^8}=6$

- لدينا :

$$\begin{aligned}\frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}}\sqrt{27}\times3^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[6]{3}\times\sqrt{3}}&=\frac{\left(\sqrt[15]{9}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}}\times3^{\frac{3}{2}}\times3^{\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{2}}}\\&=\frac{\left(3^{\frac{2}{15}}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{2}{5}}}{3^{\frac{1}{6}}\times3^{\frac{1}{2}}}\\&=3^{\frac{4}{15}}\times3^{\frac{12}{5}}\times3^{-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}}\\&=3^{\frac{4}{15}+\frac{12}{5}-\frac{2}{3}}=3^2=9\end{aligned}$$

خلاصة : $\frac{\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{9}}\right)^2\times3^{\frac{1}{2}}\sqrt{27}\times3^{\frac{2}{5}}}{\sqrt[6]{3}\times\sqrt{3}}=9$

- اجعل المقام عدد جذري :

تذكير :

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ إذن $(a-b)$ و (a^2+ab+b^2) إحداهما الصيغة المرافق للأخر بالنسبة للجذر من الرتبة 3 .

مثال : $\sqrt[3]{x}-2=\dfrac{(\sqrt[3]{x}-2)(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\times2+2^2)}{(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}\times2+2^2)}$ نأخذ $a=\sqrt[3]{x}$ و $b=2$.

لدينا :

$$\frac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\frac{2}{\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}\times1+1^2}=\frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{(\sqrt[3]{3}^2+\sqrt[3]{3}\times1+1^2)(\sqrt[3]{3}-1)}=\frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{(\sqrt[3]{3})^3-1^3}=\frac{2(\sqrt[3]{3}-1)}{3-1}=\sqrt[3]{3}-1$$

خلاصة : $\dfrac{2}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+1}=\sqrt[3]{3}-1$

.11

حدد مجموعة تعريف الدوال التالية: $f(x)=\sqrt{x^2-3}$ ؛ $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x+3)}$ ؛ $f(x)=\sqrt[6]{9-x^2}-\sqrt[7]{x+1}$.

01. نحدد مجموعة تعريف الدوال التالية:

- لنعتبر الدالة العددية التالية: $f(x)=\sqrt{x^2-3}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} x\in D_f &\Leftrightarrow x^2-3\geq 0\\ &\Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})\geq 0\\ &\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]\left[\sqrt{3};+\infty\right[\end{aligned}$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة هي : $D_f=\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right[$.

- لنعتبر الدالة العددية التالية: $f(x)=\sqrt[3]{(x-1)(x+3)}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} x\in D_f &\Leftrightarrow (x-1)(x+3)\geq 0\\ &\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-3\right]\cup\left[1;+\infty\right[\end{aligned}$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة هي : $D_f=\left]-\infty;-3\right]\cup\left[1;+\infty\right[$.

- لنعتبر الدالة العددية التالية: $f(x)=\sqrt[6]{9-x^2}-\sqrt[7]{x+1}$.

لدينا :

$$\begin{aligned} x\in D_f &\Leftrightarrow 9-x^2\geq 0 \text{ و } x+1\geq 0\\ &\Leftrightarrow (3-x)(3+x)\geq 0 \text{ و } x+1\geq 0\\ &\Leftrightarrow x\in\left]-\infty;-3\right]\cup\left[3;+\infty\right[\text{ و } x\geq -1 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow x\in\left(\left]-\infty;-3\right]\cup\left[3;+\infty\right[\right)\cap\left[1;+\infty\right[$$

$$\Leftrightarrow x\in\left[3;+\infty\right[$$

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة هي : $D_f=\left]-\infty;-\sqrt{3}\right]\cup\left[\sqrt{3};+\infty\right[$.

.12

أحسب النهايات التالية :

.01 نحسب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}=+\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3+x+1=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt[5]{x^4+1}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^4+1=\lim\limits_{x\to-\infty}x^4=+\infty$.
- $\lim\limits_{x\to4^-}\dfrac{\sqrt[6]{4-x}}{x}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to4^-}\sqrt[6]{4-x}=0$ و $\lim\limits_{x\to4^-}x=4$
- $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x}{\sqrt[3]{x-1}}=+\infty$ لأن $\lim\limits_{x\to1^+}\sqrt[3]{x-1}=0^+$ و $\lim\limits_{x\to1^+}x=1$.
- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-1}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-1}{x\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-1}\quad;\ \left(\left|x^3\right|=x;\left|x^2\right|=x;x\to+\infty\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x}\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-\frac{1}{x}\right]}{\cancel{x}\left[\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\frac{1}{x}\right]}$$

$$=1\quad;\ \left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}-\frac{1}{x}=1;\ \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}-\frac{1}{x}=1\right)$$

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=1$

- لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[4]{x^5+1}=\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-\sqrt[4]{x^5\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-x\times\sqrt[4]{x\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}\ ;\left(\sqrt[4]{x^5}=\sqrt[4]{x^4}\times\sqrt[4]{x}=x\times\sqrt[4]{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\times\left[\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-\sqrt[4]{x\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}\right]$$

$$=-\infty\qquad ;\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}=1;\ \lim_{x\to+\infty}-\sqrt[4]{x\left(1+\frac{1}{x^5}\right)}=-\infty\right)$$

خلاصة : $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-\sqrt[4]{x^5+1}=-\infty}$.

.02 $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-x$ ؛ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$ ؛ $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x-2}}{x}$ ؛ $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ ؛ $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt[4]{x^5+1}}{x+1}$

- $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$ لدينا :

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1^3}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}\left(\left(\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1\right)\right)}$$

$$=\frac{1}{3}\qquad ;\left(\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x}^2+\sqrt[3]{x}+1=3\right)$$

خلاصة : $\boxed{\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{3}}$

- $\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-x$ لدينا :

(استعمال المرافق)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x^3+x+1}-x=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}-x\right)\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}^2-\sqrt[3]{x^3+x+1}\times x+x^2\right)}{\sqrt[3]{x^3+x+1}^2-\sqrt[3]{x^3+x+1}\times x+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt[3]{x^3+x+1}\right)^3 - x^3}{\sqrt[3]{x^3+x+1}^2 + \sqrt[3]{x^3+x+1}\times x + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^3}+x+1-\cancel{x^3}}{\sqrt[3]{x^3+x+1}^2 + \sqrt[3]{x^3+x+1}\times x + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\times x + x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + x\times x\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}\times x + x^2} \quad \left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 = \sqrt[3]{\left(x^3\right)^2\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^{\cancel{2}}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right)}$$

$$= 0$$

لأن :

$$\lim_{x\to+\infty} 1+\frac{1}{x} = 1 \ ; \ \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}+1 = 3$$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}^2 + \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right) = +\infty$$

خلاصة : $\boxed{\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^3+x+1}-x = 0}$

- لدينا $\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$:

(استعمال المرافق)

$$\lim_{x\to0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{\left(\sqrt[3]{1+x^2}-1\right)\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}\times1+1^2\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}\times1+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}^3-1^3}{x^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}\times 1+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}^2+\sqrt[3]{1+x^2}+1}$$

$$=\frac{1}{3}$$

خلاصة : $\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{1}{3}}$

- لدينا : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x+2}}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x+2}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x+2}\right)\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3\right)}{x\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x-2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x-2}^2+\sqrt[4]{3x-2}^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+2}^4-\sqrt[4]{3x+2}^4}{x\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+2-(3x+2)}{x\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cancel{x}}{\cancel{x}\left(\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3\right)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2}{\sqrt[4]{x+2}^3+\sqrt[4]{x+2}^2\times\sqrt[4]{3x+2}+\sqrt[4]{x+2}\times\sqrt[4]{3x+2}^2+\sqrt[4]{3x+2}^3}$$

$$=\frac{-2}{\sqrt[4]{2}^3+\sqrt[4]{2}^2\times\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}\times\sqrt[4]{2}^2+\sqrt[4]{2}^3}$$

$$=\frac{-2}{4\times\sqrt[4]{2}^3}$$

$$= \frac{-1\times\sqrt[4]{2}}{2\times\sqrt[4]{2}^{3}\times\sqrt[4]{2}}$$

$$= \frac{-1\times\sqrt[4]{2}}{2\times 2}$$

$$= \frac{-\sqrt[4]{2}}{4}$$

خلاصة : $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[4]{x+2}-\sqrt[4]{3x+2}}{x}=\frac{-\sqrt[4]{2}}{4}$

• $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$ لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}-1\right)\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1^2\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{3}-1^3\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}^{2}-1^2\right)\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1^2\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^3+1-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{\left(x^2+1-1\right)\left(\sqrt[3]{x^3+1}^{2}+\sqrt[3]{x^3+1}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}+\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\left(x\times\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}{x^2\left(x^2\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}+x\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+1\right)}\quad\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}=x^2\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^4}\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2\times x^2}\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}^{2}+\frac{1}{x}\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)^2}+\frac{1}{x}\times\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^3}\right)}+\frac{1}{x^2}=1 \;;\; \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}+\frac{1}{x}=1\right) \;;\; =\frac{1}{1}=1$$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt[3]{x^3+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}=1$

- لدينا : $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt[4]{x^5+1}}{x+1}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt[4]{x^5+1}}{x+1} &= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt[4]{x^5+1}\times\sqrt[4]{x^5+1}^3}{(x+1)\sqrt[4]{x+1}^3}\\
&= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^5+1}{(x+1)\sqrt[4]{(x+1)^3}} \quad ; \quad \left(x^5+1=x^5-(-1)^5\right)\\
&= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^5-(-1)^5}{(x+1)\sqrt[4]{(x+1)^3}} \quad ; \quad \left(a^5-b^5=(a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)\right)\\
&= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{\cancel{(x+1)}\left(x^4+x^3\times(-1)+x^2\times(-1)^2+x\times(-1)^3+(-1)^4\right)}{\cancel{(x+1)}\sqrt[4]{(x+1)^3}}\\
&= \lim_{x\to(-1)^+}\frac{\left(x^4-x^3+x^2-x+1\right)}{\sqrt[4]{(x+1)^3}}\\
&= +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x\to(-1)^+}\sqrt[4]{(x+1)^3}=0^+ \;;\; \lim_{x\to(-1)^+}x^4-x^3+x^2-x+1=5\right)
\end{aligned}$$

خلاصة : $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt[4]{x^5+1}}{x+1}=+\infty$

13.

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة ب: $\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{1-x} & ; x<0 \\ f(x)=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}} & ; x\geq 0 \end{cases}$.

01. نحسب: $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ وأول مبيانيا النتيجة .

لدينا :

- $\left(\lim_{x\to+\infty}1+\sqrt{x}=+\infty\right) \;;\; \lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=0$.
- تأويل هندسي للنتيجة : منحنى الدالة f يقبل مقارب أفقي معادلته هي $y=0$.

02. ندرس اتصال f في النقطة $x_0=0$.

- اتصال الدالة f على يمين $x_0 = 0$

لدينا : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = 1 = f(0)$ ؛ و منه الدالة f متصلة على يمين $x_0 = 0$.

- اتصال الدالة f على يسار $x_0 = 0$

لدينا : $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sqrt[3]{1-x} = 1 = f(0)$ ؛ و منه الدالة f متصلة على يسار $x_0 = 0$.

خلاصة : الدالة f متصلة في $x_0 = 0$.

14.

لتكن f الدالة العددية المعرفة كما يلي : $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$.

01. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

لدينا :

$$x \in D_f \Leftrightarrow x^2+1>0$$
$$\Leftrightarrow x^2 > -1$$

و هذا دائما صحيح لكل x من $\mathbb{R}$ ؛ و منه : f معرفة على $\mathbb{R}$.

خلاصة : مجموعة تعريف الدالة f هي $D_f = \mathbb{R}$.

02. ندرس زوجية الدالة f على D_f .

لدينا :

- لكل x من $\mathbb{R}$ كذلك $-x$ من $\mathbb{R}$.
- ليكن x من $\mathbb{R}$:

$$f(-x) = \frac{-x}{\sqrt[3]{(-x)^2+1}} = -\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}} = -f(x)$$

و منه : $f(-x) = -f(x)$

خلاصة : الدالة f فردية على $D_f = \mathbb{R}$.

03. أحسب: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها .

- نحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ لدينا :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} \quad \left(\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{1-\frac{2}{3}}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}$$

$$= +\infty \quad ; \quad \left(\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{3}} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty\right)$$

خلاصة : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

- نحسب : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$. لدينا :

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{x}}{\sqrt[3]{x^2+1}} \times \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2+1}}$$

$$= 1$$

و منه : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1$

نلاحظ أن : $\left(f(0) = 0\right)$; $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1 \Leftrightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \in \mathbb{R}$

إذن : $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 \in \mathbb{R}$ ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على يمين النقطة $x_0 = 0$ و العدد المشتق على يمين

- نعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها النقطة $x_0 = 0$ هو $f_d'(0) = 1$.

و منه : منحنى الدالة f يقبل نصف مماس في النقطة $x_0 = 0$ معامله الموجه هو $m = f_d'(0) = 1$.

15.

01. نعتبر المعادلة : $(E) \ : \ \sqrt[3]{(x+2)^2} - \sqrt[3]{x+2} + 3 = 0$.

- نحدد مجموعة تعريف المعادلة (E) . لدينا :

$$\begin{aligned} x \in D_f &\Leftrightarrow x+2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq -2 \\ &\Leftrightarrow x \in [-2;+\infty[\end{aligned}$$

خلاصة : مجموعة تعريف المعادلة (E) $D_f = [-2;+\infty[$.

- نحل المعادلة (E) على $[-2;+\infty[$.

لدينا :

$$\begin{aligned} (E) &\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)^2} - 4\sqrt[3]{x+2} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{(x+2)}^{\,2} - 4\sqrt[3]{x+2} + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow X^2 - 4X + 3 = 0 \quad ; \quad \left(X = \sqrt[3]{(x+2)}\right) \\ &\Leftrightarrow X = 3 \ \text{أو} \ X = 1 \\ &\Leftrightarrow X = \sqrt[3]{(x+2)} = 3 \ \text{أو} \ X = \sqrt[3]{(x+2)} = 1 \\ &\Leftrightarrow x+2 = 3^3 \ \text{أو} \ x+2 = 1^3 \\ &\Leftrightarrow x = 25 \in [-2;+\infty[\ \text{أو} \ x = -1 \in [-2;+\infty[\end{aligned}$$

خلاصة : مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{-1;25\}$.