التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 13$ و $U_{n+1} = \frac{1}{5}U_n + \frac{4}{5}$

1) بين أنّ $U_n > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) استنتج أنّ المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

4) نضع $V_n = U_n - 1$ بين أنّ المتتالية $(V_n)_n$ هندسية و استنتج الحد العام U_n بدلالة n

5) أحسب بدلالة n الجمع $S = \sum_{k=0}^{k=n-1} U_k$

التمرين الثاني

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} U_0 = -\frac{3}{4} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \end{cases}$

-1 بين أنّ $-1 < U_n < -\frac{1}{2}$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

-2 أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

-3 نضع $V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أنّ $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب- حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

ج- أحسب الجمع $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-1}$ و الجداء $P_n = V_0 V_1 .... V_n$ بدلالة n

التمرين الثالث

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{6U_n - 4}{U_n + 2} \end{cases}$

-1 بين أنّ $U_n > 2$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

-2 أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

-3 نضع $V_n = \frac{2}{U_n - 2}$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أنّ $(V_n)_n$ متتالية حسابية و أحسب V_n بدلالة n

ب- حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

ج- أحسب الجمع $S_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-1}$

التمرين الرابع

لتكن $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية بحيث : $U_0 = 3$ و $2U_{n+1} = U_n + n + 2$

❖ أحسب U_1 وبين أنّ $U_n \geq n$ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ و أحسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$

❖ استنتج نهاية المتتالية $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

❖ نضع $V_n = U_n - n$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $\left(V_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية

ب- استنتج أن $U_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + n$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}^*\right)$

ج- أحسب بدلالة n الجمع $S = U_0 + U_1 + ... + U_n$

التمرين الخامس

$\left(U_n\right)_n$ متتالية معرفة بـ: $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = \frac{\left(3n+2\right)U_n}{6n+10}$

1) أحسب U_1 وبين أن $0 < \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ لكل n من $\mathbb{N}$ ثم استنتج رتابة المتتالية $\left(U_n\right)_n$

2) نضع $V_n = \left(3n+2\right)U_n$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن $\left(V_n\right)_n$ متتالية هندسية و حدد أساسها

ب- حدد U_n بدلالة n ثم أحسب نهاية $\left(U_n\right)_{n\geq 1}$

التمرين السادس

نعتبر المتتالية $\left(U_n\right)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{5}{2}$ و $U_{n+1} = \frac{2}{9}U_n^2 + 1$

1) بين أن $\frac{3}{2} < U_n < 3$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

2) بين أن $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{9}\left(U_n - 3\right)\left(2U_n - 3\right)$ ثم أدرس رتابة المتتالية $\left(U_n\right)_n$

3) استنتج أن المتتالية $\left(U_n\right)_n$ متقاربة

4) أ- بين أن $U_{n+1} - 3 \leq \frac{8}{9}\left(U_n - 3\right)$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

ب- استنتج أن $U_n - 3 \leq \left(\frac{8}{9}\right)^n$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$ ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

التمرين السابع

نعتبر الدالة f بحيث : $f\left(x\right) = \frac{2x^2}{1+x^3}$ و $I = \left]0, \frac{1}{2}\right]$

1) أ- بين أن $f'\left(x\right) = \frac{4x\left(1-x^3\right)}{\left(x^3+1\right)^2}$ وأنجز جدول تغيرات f

ب- بين أن $f\left(I\right) \subset I$

2) نعتبر المتتالية $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{2}$ و $U_{n+1} = f\left(U_n\right)$

أ- بين أن $0 < U_n \leq \frac{1}{2}$ $\left(\forall n \in \mathbb{N}\right)$

ب- ادرس رتابة المتتالية $\left(U_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$

ج- بين أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين الثامن

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة بـ: $\begin{cases} U_0 = -\dfrac{1}{3} \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n}{1-2U_n} \end{cases}$

ج- بين أن $U_n < 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3- نضع $V_n = 1 + \dfrac{1}{U_n}$ لكل n من $\mathbb{N}$

ج- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب- حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب النهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ج- أحسب $S = \dfrac{1}{U_0} + \dfrac{1}{U_1} + ... + \dfrac{1}{U_n}$ بدلالة

التمرين التاسع

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 0$ و $U_{n+1} = \dfrac{\left(1+\sqrt[3]{U_n}\right)^3}{8}$

2) أ- أحسب U_1 و بين أن $0 \le U_n \le 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

2) نضع $V_n = \sqrt[3]{U_n} - 1$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \dfrac{1}{2}$ و أحسب U_n بدلالة n و أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

ب- أحسب بدلالة n الجمع $S = \sum\limits_{k=0}^{k=n} \sqrt[3]{U_k}$

التمرين العاشر

لتكن $(u_n)_n$ متتالية عددية بحيث : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1} = (1-u_n)^2 + 1$

1) أ- بين أن $1 < u_n \le \dfrac{3}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن $u_{n+1} - u_n = (2-u_n)(1-u_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ و استنتج أن $(u_n)_n$ تناقصية

2) أ- بين أن $|u_{n+1} - 1| \le \dfrac{1}{2}|u_n - 1| \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بين أن $|u_n - 1| \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ج- استنتج أن $(u_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها