

I. المعادلة التفاضلية: $y' = ay + b$

01. تذكير:

- f دالة عددية نرملها ب: y .
- f' الدالة المشتقة ل f نرمل ب f' ب: y' .
- الكتابة $f'(x) = af(x) + b$ نكتبها على الشكل الآتي $y' = ay + b$ و تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة.
- كل دالة عددية g قابلة للاشتقاق و تحقق المعادلة السابقة (أي $g'(x) = ag(x) + b$) تسمى حلا للمعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

02. حل المعادلة: $y' = ay + b$

المعادلة التفاضلية على شكل	حلول المعادلة هي الدوال $f(x)$ المعرفة على \mathbb{R} و التي هي على شكل	مثال	الحلول هي
$y' = b; b \neq 0$	$f(x) = bx + c$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 7$	مع $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = 7x + c$
حالة خاصة $y' = 0$	$f(x) = c$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 0$	مع $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = c$
$y' = ay; a \neq 0$	$f(x) = c \times e^{ax}$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 2y$	مع $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = c \times e^{2x}$
$y' = ay + b$ و a, b من \mathbb{R}^*	$f(x) = c \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ (مع $c \in \mathbb{R}$)	$y' = 4y + 5$	مع $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = c \times e^{4x} - \frac{5}{4}$

03. برهان ل : $y' = ay + b = b ; a=0$

(الدالة المشتقة ثابتة إذن : $y = f(x) = bx + c$ مع $c \in \mathbb{R}$)

04. برهان ل $y' = ay ; a \neq 0$: (1)

نعتبر دالة f حل للمعادلة التفاضلية (1) حيث f معرفة على مجال I . ومنه : $\forall x \in I : f'(x) = af(x)$.

حالة : $\forall x \in I, f(x) = 0$. الدالة المنعدمة هي حل لهذه المعادلة التفاضلية (1) مع $c = 0$.

حالة : $\forall x \in I, f(x) \neq 0$

إذن : $a = \frac{f'(x)}{f(x)}$ و بالتالي : $\ln|f(x)| = ax + c'$ مع $c' \in \mathbb{R}$. (درس الدوال الأصلية).

ومنه : $|f(x)| = e^{ax+c'} = e^{ax} \times e^{c'} = \lambda e^{ax}$ مع $\lambda = e^{c'} > 0$ من \mathbb{R} .

ومنه : $f(x) = \lambda e^{ax} > 0$ أو $f(x) = -\lambda e^{ax} < 0$ مع $\forall x \in I, \lambda = e^{c'} > 0$ من \mathbb{R} .

إذن : يوجد x_1 و x_2 من I حيث : $f(x_1) = \lambda e^{ax_1} > 0$ و $f(x_2) = -\lambda e^{ax_2} < 0$ ؛ حسب مبرهنة القيم الوسطية T.V.I نستنتج

أن : يوجد c_0 من I حيث $f(c_0) = 0$. هذا غير ممكن لأن $f(x) \neq 0$ ($\forall x \in I$)

إذن : $\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{ax}$ أو $\forall x \in I, f(x) = -\lambda e^{ax}$

باختصار : $\forall x \in I, f(x) = -ce^{ax}$ مع $c \in \mathbb{R}$.

05. برهان ل $y' = ay + b$; $a \neq 0$ (2) :

لدينا :

$$y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a \left(y + \frac{b}{a} \right)$$

$$\Leftrightarrow y' = az, \quad z = y + \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow z' = az, \quad z = y + \frac{b}{a}, \quad z' = \left(y + \frac{b}{a} \right)' = y'$$

حسب البرهان السابق نحصل على : حلول المعادلة التفاضلية : $z' = az$ هي الدوال التي على شكل : $z = ce^{ax}$ مع c من \mathbb{R} .

$$\text{إذن : } z = ce^{ax} \Leftrightarrow z = y + \frac{b}{a} = ce^{ax} \Leftrightarrow y = ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

خلاصة الحل العام ل $y' = ay + b$ و a و b من \mathbb{R}^* : هي الدوال التي على شكل $f(x) = c \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ (مع $c \in \mathbb{R}$)

06. خاصية :

المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ مع $a \neq 0$ تقبل حلا وحيدا f يحقق الشرط البدني $f(x_0) = y_0$ مع x_0 و y_0 من \mathbb{R}

II. المعادلة التفاضلية: $y'' + ay' + by = 0$ **01. تعاريف:**

- a و b من \mathbb{R} .
- المعادلة $(E): y'' + ay' + by = 0$ حيث المجهول هو دالة y مع y' مشتقتها الأولى مع y'' مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة .
- كل دالة عددية f قابلة للاشتقاق مرتين و تحقق المعادلة التفاضلية (E) تسمى حل خاص للمعادلة التفاضلية (E)
- المعادلة $r^2 + ar + b = 0$ حيث r هو المجهول تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية $(E): y'' + ay' + by = 0$.

02. حل المعادلة التفاضلية: $y'' + ay' + by = 0$

مبرهنة مقبولة :

- لتكن المعادلة التفاضلية: $(E): y'' + ay' + by = 0$ و معادلتها المميزة $r^2 + ar + b = 0$ حيث a و b من \mathbb{R} و $\Delta = a^2 - 4b$ المميز للمعادلة المميزة
- ❖ $\Delta = a^2 - 4b > 0$ إذن المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ لها حلين حقيقيين r_1 و r_2 فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي :
الدوال المعرفة على \mathbb{R} ب: $y = f(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$ مع α و β من \mathbb{R} .
 - ❖ $\Delta = a^2 - 4b = 0$ إذن المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ لها حل حقيقي مزدوج r_1 فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي :
الدوال المعرفة على \mathbb{R} ب: $y = f(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_1 x}$ مع α و β من \mathbb{R} .
 - ❖ $\Delta = a^2 - 4b < 0$ إذن المعادلة المميزة $r^2 + ar + b = 0$ لها حلين عقديين مترافقين $r_1 = p + iq$ و $r_2 = p - iq$ فإن حلول المعادلة التفاضلية (E) هي : الدوال المعرفة على \mathbb{R} ب: $y = f(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px}$ مع α و β من \mathbb{R} .

03. ملحوظة:

المعادلة التفاضلية: $y'' + \omega^2 y = 0$ حلولها هي الدوال المعرفة على \mathbb{R} ب: $y = f(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$; $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

04. أمثلة :

مثال 1 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : (E) : $y'' - 5y' + 6y = 0$.

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .
2. أعط حلول المعادلة المميزة .
3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) :

هي : (C) : $r^2 - 5r + 6 = 0$.

2. حلول المعادلة هي :

$$r_2 = 3, r_1 = 2, \Delta = 1$$

3. نستنتج حلول المعادلة :

الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل : $y = f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$ مع α و β من \mathbb{R} .

مثال 2 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية : (E) : $y'' + y' + y = 0$.

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .
2. أعط حلول المعادلة المميزة .
3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) هي : (C) : $r^2 + r + 1 = 0$.

2. حلول المعادلة هي :

$$r_2 = \bar{r}_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}, r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j, \Delta = -3$$

3. نستنتج حلول المعادلة :

الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل : $f(x) = \left(\alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{1}{2}x}$ مع α و β من \mathbb{R} .

05. تمرين :

1 حل المعادلة التفاضلية: (E) : $y' + 2y = 0$ 2 بين أن : $y_0 = e^{-3x}$ حل للمعادلة التفاضلية (E') : $y' + 2y = -e^{-3x}$ 3 حدد الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E') التي تحقق $g(0) = 2$