

الجداء السلمي في الفضاء و تطبيقاته

I-الجداء السلمي

1- تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء، و A و B و C نقط من الفضاء حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.
 يوجد على الاقل مستوى (P) ضمن الفضاء يمر من النقط A و B و C .
 الجداء السلمي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} في الفضاء هو الجداء السلمي $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ في المستوى (P) نرسم له $\vec{u} \cdot \vec{v}$

ملحوظة

جميع خاصيات الجداء السلمي في المستوى تمتد إلى الفضاء

2- نتائج

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء، و A و B و C نقط من الفضاء

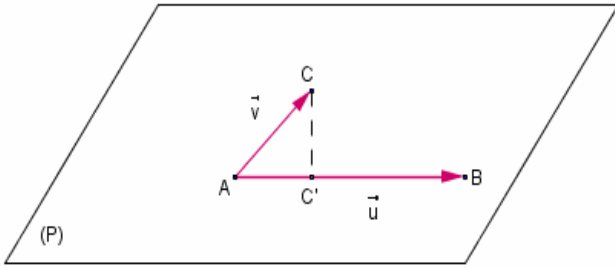
حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

* إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$

* إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $\vec{v} = \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

* إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC'}$ حيث C' المسقط العمودي ل C على (AB)

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2) *$$



3- منظم متجهة

لتكن \vec{u} متجهة و A و B نقطتين من الفضاء حيث $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

العدد الحقيقي $\vec{u} \cdot \vec{u}$ يسمى المربع السلمي ل \vec{u} و يكتب $\vec{u}^2 = AB^2$

العدد الحقيقي الموجب $\sqrt{\vec{u}^2}$ يسمى منظم المتجهة \vec{u} نكتب $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}$

ملاحظة و كتابة

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 *$$

* إذا كان $\vec{u} \neq \vec{0}$ و $\vec{v} \neq \vec{0}$ فإن $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$

4- خاصيات

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} \quad \text{متطابقات هامة}$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + \vec{v}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in V_3^3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u} *$$

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} *$$

$$(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u} *$$

$$\vec{u} \cdot \alpha \vec{v} = \alpha \vec{u} \cdot \vec{v} = \alpha \times (\vec{u} \cdot \vec{v}) *$$

5- تعامد متجهتين :

تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء V_3 .

تكون \vec{u} و \vec{v} متعامدين إذا وفقط إذا كان $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ نكتب $\vec{u} \perp \vec{v}$

ملاحظة المتجهة $\vec{0}$ عمودية على أية متجهة من الفضاء V_3

تمرين

المكعب ABCDEFGH الذي طول حرفه a

أحسب $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BG}$ و $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AG}$ و $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{EB}$

II- صيغة تحليلية

1- الأساس و المعلم المتعامدان الممندان

تعريف

لتكن \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} ثلاث متجهات غير مستوائية من الفضاء V_3 و O نقطة من الفضاء.
أساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ للفضاء V_3
يكون الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد (أو المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد) إذا وفقط إذا كانت المتجهات \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} متعامدة متنى متنى.
يكون الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد و ممنظم (أو المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ متعامد و ممنظم) إذا وفقط إذا كانت المتجهات \vec{i} و \vec{j} و \vec{k} متعامدة متنى متنى و $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$

2- الصيغة التحليلية للجداء السلمي

أ- خاصة

الفضاء منسوب إلى معلم م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

إذا كانت $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ فان $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

ملاحظة إذا كانت $\vec{u}(x; y; z)$ بالنسبة للمعلم م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ فان

$$\vec{u} \cdot \vec{i} = x \quad ; \quad \vec{u} \cdot \vec{j} = y \quad ; \quad \vec{u} \cdot \vec{k} = z$$

ب- الصيغة التحليلية لمنظم متجهة و لمسافة بين نقطتين

*- إذا كانت $\vec{u}(x; y; z)$ بالنسبة للمعلم م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ فان $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
*- إذا كانت $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ بالنسبة للمعلم م.م.م $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \quad \text{فان}$$

تعيين

نعتبر $A(1; 1; \sqrt{2})$ و $B(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$ و $C(-1; -1; -\sqrt{2})$

بين أن ABC مثلث متساوي الساقين وقائم الزاوية

3- تحديد تحليلي لمجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{u} \cdot \overline{MA} = k$

لتكن $\vec{u}(a; b; c)$ متجهة غير منعدمة و $A(x_A; y_A; z_A)$ نقطة من الفضاء
نعتبر $M(x; y; z)$

$$\vec{u} \cdot \overline{MA} = k \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

خاصة

لتكن $\vec{u}(a; b; c)$ متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء
مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{u} \cdot \overline{MA} = k$ هي مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ حيث d عدد حقيقي

مثال نعتبر $\vec{u}(2; -1; 1)$ متجهة و $A(1; -1; 2)$ نقطة من الفضاء

حدد مجموعة النقط M من الفضاء بحيث $\vec{u} \cdot \overline{MA} = -1$

III- تطبيقات الجداء السلمي في الفضاء

1- تعامد المستقيمت و المستويات في الفضاء

أ- تعامد مستقيمتين

ليكن (D_1) و (D_2) مستقيمتين من الفضاء موجهين بالمتجهتين \vec{u}_1 و \vec{u}_2 على التوالي

$$(D_1) \perp (D_2) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$$

ب- تعامد مستقيم و مستوى

خاصة

ليكن (P) مستوى موجه بالمتجهتين \vec{u}_1 و \vec{u}_2 و (D) مستقيم موجه بالمتجهة \vec{u}_3

$$(D) \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_3 \quad \text{و} \quad \vec{u}_2 \perp \vec{u}_3$$

ج- ملاحظات واصطلاحات

- * المتجهة \vec{u} الموجهة لمستقيم (D) العمودي على مستوى (P) تسمى متجهة منظمية للمستوى (P).
- * إذا كانت \vec{u} منظمية لمستوى (P) فإن كل متجهة \vec{v} مستقيمية مع \vec{u} تكون منظمية للمستوى (P)
- * إذا كانت \vec{u} منظمية لمستوى (P) و \vec{v} منظمية لمستوى (P') وكانتا \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين فإن (P) و (P') متوازيان

* إذا كان $(A; B) \in (P)^2$ و \vec{u} منظمية لمستوى (P) فإن $\vec{u} \perp \overline{AB}$

تمرين في الفضاء المنسوب إلى معلم م. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

حدد تمثيل بارامتري للمستقيم (D) المار من $A(-1; 2; 0)$ و العمودي على المستوى (P) الموجه بالمتجهتين $\vec{u}(1; -1; 1)$ و $\vec{v}(2; 1; 1)$

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم م. $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر المستوى

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + 3t \\ z = -2 + bt \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad (P) \text{ الذي معادلته } ax - 2y + z - 2 = 0 \text{ و المستقيم (D) تمثله بارامتري}$$

1- حدد متجهتين موجهتين للمستوى (P)

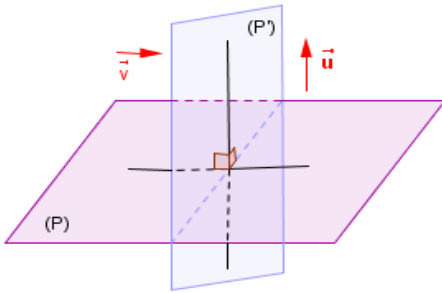
2- حدد a و b لكي يكون $(D) \perp (P)$

د- تعامد مستويين

تذكير يكون مستويان متعامدين اذا و فقط اذا اشتمل أحدهما على مستقيم عمودي على المستوى الآخر.

خاصة

ليكن (P) و (P') مستويين من الفضاء و \vec{u} و \vec{v} متجهتين منظمتين لهما على التوالي $(P) \perp (P')$ اذا و فقط اذا كان $\vec{u} \perp \vec{v}$



2- معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه

a. مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه

مبرهنة

لتكن \vec{u} متجهة غير منعدمة و A نقطة من الفضاء
* المستوى المار من A و المتجهة \vec{u} منظمية له هو مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overline{AM} \cdot \vec{u} = 0$
* مجموعة النقط M من الفضاء حيث $\overline{AM} \cdot \vec{u} = 0$ المستوى المار من A و المتجهة \vec{u} منظمية له

b. معادلة مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه

خاصة

* كل مستوى (P) في الفضاء و $\vec{u}(a; b; c)$ منظمية عليه يقبل معادلة ديكارتية من نوع $ax + by + cz + d = 0$
* كل معادلة ديكارتية من نوع $ax + by + cz + d = 0$ حيث $(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$ هي معادلة مستوى (P) في الفضاء بحيث $\vec{u}(a; b; c)$ منظمية عليه

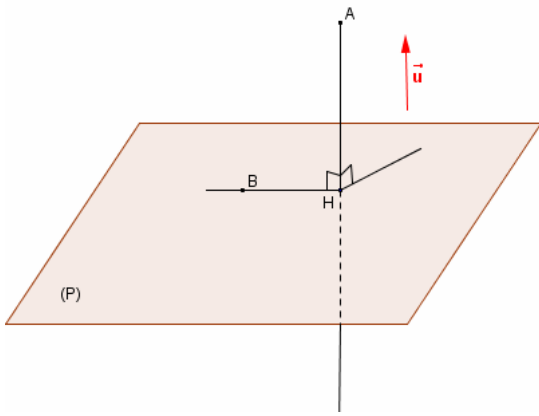
تمرين

$$(D): \begin{cases} x + y - 2z + 1 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases} \quad (P) : 2x - y + 3z + 1 = 0 \quad \text{نعتبر}$$

- 1- حدد متجهة \vec{u} منظمية على (P) ونقطة منه.
- 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من $A(2; 0; 3)$ و $\vec{n}(1; 2; 1)$ منظمية عليه.
- 3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من $A'(2; 0; 3)$ و العمودي على (D)
- 4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى المار من $A(2; 0; 3)$ و الموازي لـ (P)

-3- مسافة نقطة عن مستوى

-1- تعريف و خاصة



الفضاء منسوب إلى معلم م.م.م $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
مسافة نقطة A عن مستوى (P) هي المسافة AH
حيث H المسقط العمودي لـ A على (P) نكتب

$$d(A; (P)) = AH = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}$$

حيث $B \in (P)$ و \vec{u} منظمية على (P)

-2- خاصة

ليكن (P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ و نقطة من الفضاء $A(x_0; y_0; z_0)$

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

مثال

ليكن (P) مستوى مار من $B(2; 1; 3)$ و $\vec{u}(1; -1; \sqrt{2})$ منظمية عليه لتكن $A(1; 2; 0)$

حدد $d(A; (P))$

تمرين 1

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
نعتبر $A(1; -1; 1)$ و $B(3; 1; -1)$ و (P) المستوى ذا المعادلة $2x - 3y + 2z = 0$ و (D) المستقيم الممثل

$$\begin{cases} x = 3t \\ x = -2 - 3t \\ z = 2 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{بارا متريا بـ}$$

- 1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A والعمودي على المستقيم (D)
- 2- أحسب $d(A; (P))$ و $d(A; (D))$
- 3- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين 2

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم.
نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $3x + 2y - z - 5 = 0$ و (D) المستقيم المعرف بـ

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

- 1- حدد تمثيلا بارا متريا للمستقيم (D)
- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P)

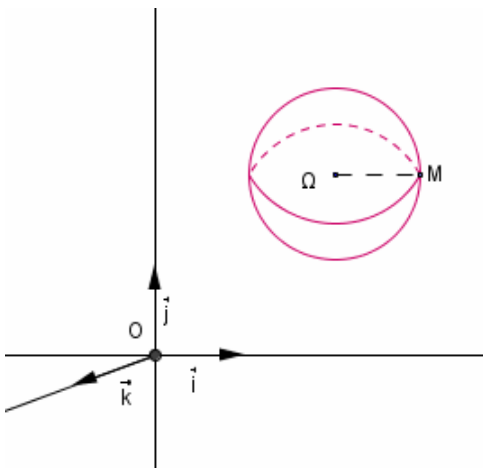
-IV- معادلة فلكة

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

-1- معادلة فلكة معرفة بمركزها وشعاعها

لتكن $\Omega(a; b; c)$ نقطة من الفضاء (E) و $r \in \mathbb{R}^{*+}$ و الفلكة $S(\Omega; r)$ التي مركزها Ω و شعاعها r
ليكن $M(x; y; z)$ من الفضاء (E)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2 \Leftrightarrow \Omega M = r \Leftrightarrow M \in S(\Omega; r)$$



مبرهنة

الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.
معادلة ديكارتية للكرة $S(\Omega; r)$ التي مركزها $\Omega(a; b; c)$ و شعاعها r
هي $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

ملاحظات و اصطلاحات

- * إذا كان A و B نقطتين من الكرة $S(\Omega; r)$ حيث Ω منتصف $[A; B]$ فان $[A; B]$ قطرا للكرة
- * توجد فلكة وحيدة أحد أقطارها $[A; B]$ مركزها Ω منتصف $[A; B]$ و شعاعها $r = \frac{1}{2} AB$
- * للكرة $S(\Omega; r)$ معادلة ديكارتية من شكل $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + \delta = 0$ حيث a و β و γ و δ أعداد حقيقية.

* **الكرة** $S(\Omega; r)$ حيث O أصل المعلم معادلتها $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

* **الكرة** $S(\Omega; r)$ لتكن فلكة التي مركزها $\Omega(a; b; c)$ و شعاعها r

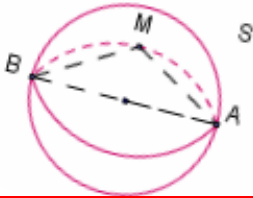
الكرة $B(\Omega; r)$ التي مركزها $\Omega(a; b; c)$ و شعاعها r هي مجموعة النقط $M(x; y; z)$

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 \leq r^2$$

2- معادلة فلكة معرفة بأحد أقطارها

S فلكة أحد أقطارها $[A; B]$

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow M = B \text{ أو } M = A \text{ أو } \angle [AMB] \Leftrightarrow M \in S$$



مبرهنة

A و B نقطتان مختلفتان في الفضاء

في الفضاء مجموعة النقط M التي تحقق $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ هي فلكة التي أحد أقطارها $[A; B]$

خاصة

إذا كانت $A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ نقطتين مختلفتين فان معادلة الفلكة التي أحد أقطارها $[A; B]$

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) + (z - z_A)(z - z_B) = 0$$
 هي

تمرين

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر $\Omega(1; 2; -1)$ و $A(2; 1; 2)$ و $B(4; 1; 2)$

1- حدد معادلة ديكارتية للكرة S التي مركزها Ω و المار من A

2- حدد معادلة ديكارتية للكرة S' التي قطرها $[A; B]$

3- دراسة المعادلة $(1): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$

لتكن E مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق المعادلة (1)

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d \Leftrightarrow M \in E$$

لتكن $\Omega(a; b; c)$

*- إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d < 0$ فان $E = \emptyset$

*- إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d = 0$ فان $E = \{\Omega\}$. فلكة مركزها Ω و شعاعها منعدم

*- إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$ فان $E = S(\Omega; r)$ حيث $r^2 = a^2 + b^2 + c^2 - d$

مبرهنة

a و b و c و d أعداد حقيقية

تكون مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق المعادلة $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ فلكة

إذا وفقط إذا كان $a^2 + b^2 + c^2 - d \geq 0$

تمرين نعتبر E مجموعة النقط $M(x; y; z)$ التي تحقق المعادلة $x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 6z + 5 = 0$

بين إن E فلكة محددا عناصرها المميزة

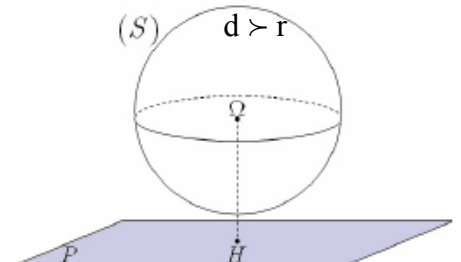
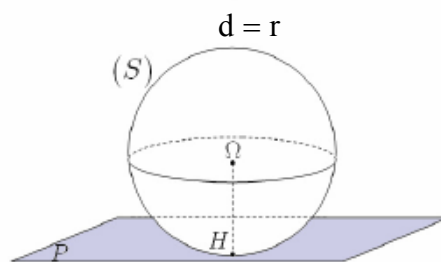
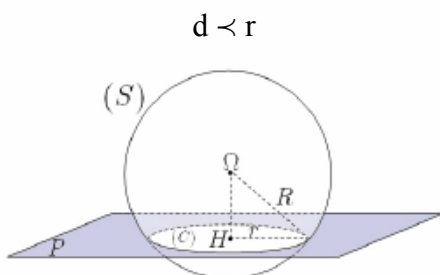
تمرين حدد مجموعة النقط M التي تحقق $2MA^2 + 3MB^2 = 16$ حيث $A(2; 0; -1)$ و $B(-1; 1; -1)$

II - تقاطع مستوى و فلكة

1- تقاطع للكرة $S(\Omega; r)$ و المستوى (P)

في الفضاء E نعتبر الفلكة $S(\Omega; r)$ و المستوى (P) و النقطة H المسقط العمودي لـ Ω على المستوى (P)

نضع $d(\Omega; (P)) = H\Omega = d$



خاصية

ليكن (P) مستوى في الفضاء و S فلكة مركزها Ω و شعاعها r و H المسقط العمودي ل Ω على المستوى (P) يكون تقاطع (P) و S :

* دائرة مركزها H و شعاعها $\sqrt{r^2 - d^2(\Omega;P)}$ اذا كان $d(\Omega;P) < r$

* نقطة اذا كان $d(\Omega;P) = r$ في هذه الحالة نقول (P) مماس للفلكة S عند النقطة H

* المجموعة الفارغة اذا كان $d(\Omega;P) > r$

2- مستوى مماس لفلكة في أحد نقطتها

تعريف

لتكن A نقطة من الفلكة $S(\Omega;r)$ نقول إن المستوى (P) مماس للفلكة S عند النقطة A اذا كان (P) عمودي على (ΩA) في A

خاصية

لتكن A نقطة من الفلكة $S(\Omega;r)$

(P) مماس على $S(\Omega;r)$ في A $\Leftrightarrow \forall M \in (P) \quad \overrightarrow{\Omega A} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$

تمرين في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ، نعتبر S_1 الفلكة التي معادلتها

معادلته $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ و S_2 الفلكة التي مركزها Ω_2 و شعاعها 2، و (P) المستوى الذي معادلته $x - 2y + z + 1 = 0$ و (P') المستوى الذي معادلته $2x - y - 2z - 1 = 0$.

1- تأكد أن (P) و S_1 يتقاطعان وفق دائرة محدد عناصرها المميزة.

2- أدرس تقاطع (P') و S_2 .

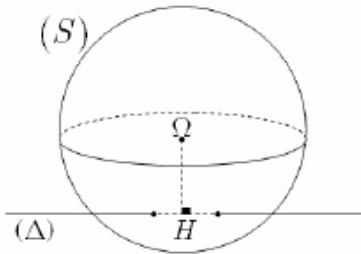
3- حدد معادلة المستوى المماس للفلكة S_1 عند النقطة $A(1;1;3)$

3- تقاطع مستقيم و فلكة

في الفضاء E نعتبر الفلكة $S(\Omega;r)$ و المستقيم (Δ) و النقطة H المسقط العمودي ل Ω على المستقيم (Δ)

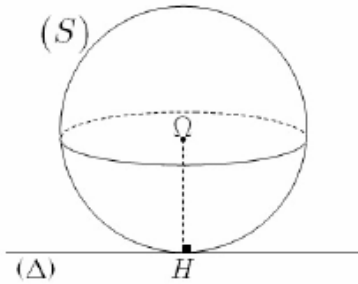
نضع $d(\Omega;(\Delta)) = H\Omega = d$

$d < r$



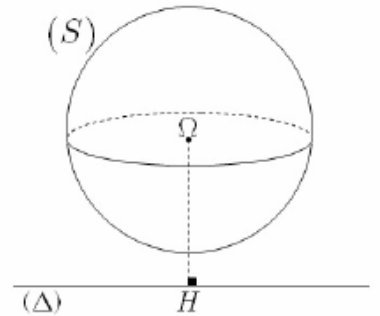
المستقيم (Δ) يخترق الفلكة S في نقطتين مختلفتين

$d > r$



المستقيم (Δ) الفلكة S يتقاطعان في النقطة H

$d > r$



تقاطع المستقيم (Δ) الفلكة S هو المجموعة الفارغة

تمرين

نعتبر $S : x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 4 = 0$

$$(D_3) : \begin{cases} x = \frac{-1}{2} + 2t \\ y = \frac{1}{3} + 3t \\ z = -2 \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad (D_2) : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 \\ z = -2 + t \end{cases}$$

$$t \in \mathbb{R} \quad (D_1) : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + t \end{cases}$$

حدد تقاطع S مع كل من (D_1) و (D_2) و (D_3)

تمارين

تمرين 1

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
- نعتبر $A(1;0;1)$ و $B(0;0;1)$ و $C(0;-1;1)$ و المستقيم (D) المار من C والموجه بـ $\vec{u}(-1;2;1)$
- 1- بين أن مجموعة النقط M حيث $MA=MB=MC$ مستقيم وحدد تمثيلا بارامتريا له
 - 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) العمودي على (D) في C
 - 3- استنتج معادلة ديكارتية للفلكة S المارة من A و B و المماس لـ (D) في C

تمرين 2

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ نعتبر $A(0;3;-5)$ و $B(0;7;-3)$ و $C(1;5;-3)$
- 1- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (ABC)
 - 2- أعط معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A حيث $\vec{u}(-1;2;1)$ منظمية عليه
 - 3- ليكن (P) المستوى المحدد بالمعادلة $x+y+z=0$
 - أ- تأكد أن (P) و (ABC) يتقاطعان وفق مسنقيم (D)
 - ب- حدد تمثيلا بارامتريا لـ (D)
 - 4- نعتبر في الفضاء الدائرة (C) التي المحددة بـ

$$\begin{cases} x^2+z^2+10z+9=0 \\ y=0 \end{cases}$$
 - أ- حدد معادلة للفلكة S التي تتضمن الدائرة (C) و ينتمي مركزها إلى (ABC)
 - ب- حدد تقاطع S و (AC)

تمرين 3

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر $A(1;-1;1)$ و $B(3;1;-1)$ و (P) المستوى ذا
- $$\begin{cases} x=3t \\ x=-2-3t \quad t \in \mathbb{R} \\ z=2+4t \end{cases}$$
- المعادلة $2x-3y+2z=0$ (D) المستقيم الممثل بارامتريا بـ
- 1- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q) المار من A و B والعمودي على المستقيم (D)
 - 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من A و B والعمودي على المستوى (P)
 - 3- أحسب $d(A;(P))$ و $d(A;(D))$
 - 4- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (Q') المار من B و الموازي للمستوى (P)

تمرين 4

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $3x+2y-z-5=0$
- و (D) المستقيم المعرف بـ
- $$\begin{cases} x-2y+z-3=0 \\ x-y-z+2=0 \end{cases}$$
- 1- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)
 - 2- حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P') الذي يتضمن (D) و العمودي على (P).

تمرين 5

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر المستوى (P) ذا المعادلة $x+y+z+1=0$
- و المستوى (Q) ذا المعادلة $2x-2y-5=0$
- و (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق $x^2+y^2+z^2-2x+4y+6z+11=0$
- 1- بين أن (S) فلكة محدد مركزها و شعاعها
 - 2- تأكد أن (P) مماس للفلكة و حدد تقاطعها
 - 3- حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من $A(0;1;2)$ و العمودي على (P)
 - 4- تحقق أن $(P) \perp (Q)$ و أعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D') تقاطع (P) و (Q)

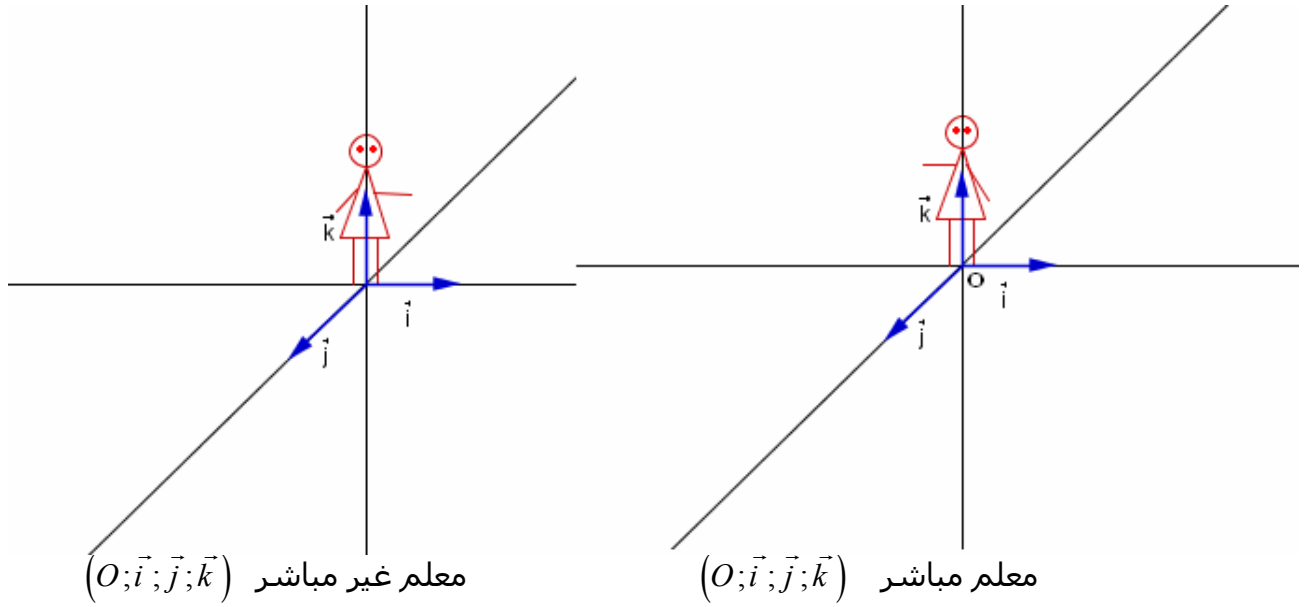
تمرين 6

- في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم نعتبر النقط $A(-2;3;4)$
- المستوى (P) ذا المعادلة $x+2y-2z+15=0$ (S) مجموعة النقط $M(x;y;z)$ التي تحقق
- $$\begin{cases} x^2+y^2-2x-8=0 \\ z=0 \end{cases}$$
- و (C) الدائرة التي معادلتها $x^2+y^2+z^2-2x+6y+10z-26=0$
- 1- بين أن (S) فلكة محدد عناصرها المميزة
 - 2- بين أن (P) و (S) يتقاطعان وفق دائرة كبرى (C') و حدها
 - 3- حدد معادلتين المستويين المماسين للفلكة (S) و الموازيين لـ (P)
 - 4- أكتب معادلة الفلكة (S') المار من A المتضمن للدائرة (C)

الجداء المتجهي

I- توجيه الفضاء 1- معلم موجه في الفضاء

ننسب الفضاء E إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$
 لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث $\vec{OI} = \vec{i}$ $\vec{OJ} = \vec{j}$ $\vec{OK} = \vec{k}$
 « رجل أمبير » للمعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ هو رجل خيالي رأسه في النقطة K قدماه على النقطة O و ينظر إلى I
 النقطة J إما توجد على يمين « رجل أمبير » أو على يساره .



تعريف :

الفضاء منسوب إلى معلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. لتكن I و J و K ثلاث نقط حيث $\vec{OI} = \vec{i}$ $\vec{OJ} = \vec{j}$ $\vec{OK} = \vec{k}$
 نقول إن : * $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم مباشر إذا وجدت J على يسار « رجل أمبير »
 * $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم غير مباشر إذا وجدت J على يمين « رجل أمبير »

أمثلة * نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم مباشر

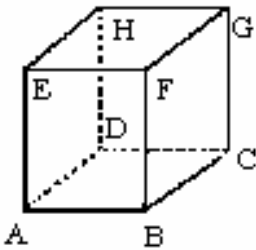
$(O; \vec{j}; \vec{i}; \vec{k})$ معلم غير مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j}; -\vec{k})$ معلم غير مباشر

$(O; \vec{j}; \vec{k}; \vec{i})$ معلم مباشر

** ABCDEFGH مكعب طول حرفه 1

معلمان مباشران $(A; \vec{AB}; \vec{AD}; \vec{AE})$; $(B; \vec{BC}; \vec{BA}; \vec{BF})$

معلمان غير مباشرين $(A; \vec{AD}; \vec{AB}; \vec{AE})$, $(E; \vec{EA}; \vec{EF}; \vec{EH})$



2- الأسرة المباشرة

يمكننا توجيه الفضاء V_3 , إذا وجهنا جميع أساساته

تعريف

نقول إن الأساس المتعامد الممنظم $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشر اذا كان $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ م.م.م. مباشر مهما كانت النقطة O من الفضاء

3- توجيه المستوى

ليكن (P) مستوى في الفضاء و \vec{k} متجهة واحدة و منتظمة على (P) , و O نقطة من المستوى (P)
 $(O; \vec{i}; \vec{j})$ م.م.م. للمستوى (P)

لدينا $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ممنظم للفضاء E

يكون المعلم المتعامد الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ في المستوى (P) معلما مباشرا اذا كان المعلم المتعامد

الممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشرا

- * يتم توجيه مستوى (P) بتوجيه متجهة منظمة عليه.
- * كل المستويات الموازية لـ (P) له نفس توجيه المستوى (P)

II - الجداء المتجهي

1- تعريف

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء V_3 و A و B نقطتين من الفضاء E بحيث $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ الجداء المتجهي للمتجهتين \vec{u} و \vec{v} في هذا الترتيب، هو المتجهة التي لها بـ $\vec{u} \wedge \vec{v}$ المعرفة كما يلي :

- * إذا كانتا \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- * إذا كانتا \vec{u} و \vec{v} غير مستقيمتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v}$ هي المتجهة التي تحقق :
 - $\vec{u} \wedge \vec{v}$ عمودي على كل من \vec{u} و \vec{v}
 - $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ أساس مباشر.

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin \theta \quad \text{حيث } \theta \text{ قياس الزاوية } [\widehat{AOB}]$$

أمثلة * نعتبر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلم متعامد ممنظم مباشر

$$\vec{i} \wedge \vec{i} = \vec{j} \wedge \vec{j} = \vec{k} \wedge \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k} \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i} \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$$

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k} \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i} \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}$$

* إذا كان \vec{u} و \vec{v} متجهتين واحدتين و متعامدتين فان $(\vec{u}; \vec{v}; \vec{u} \wedge \vec{v})$ أساس مباشر.

$$\|\vec{u}\| = 5 \quad \|\vec{v}\| = 2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = -5 \quad (\vec{u}; \vec{v}) = \theta \quad \theta \in]0; \pi[\quad \text{نحسب } \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \text{ علما أن } \theta \in]0; \pi[$$

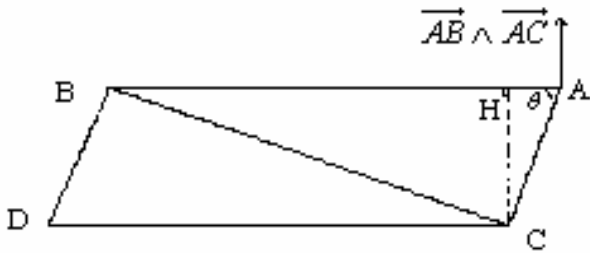
تمرين

2- خاصيات

أ- خاصية

إذا كانت A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء فان المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمة على المستوى (ABC).

لتكن A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية من الفضاء θ قياس الزاوية $[\widehat{CAB}]$ ، H المسقط العمودي لـ C على (AB)



$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \cdot AC \cdot \sin \theta \quad HC = AC \sin \theta$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = AB \times HC$$

خاصية

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ مساحة المثلث ABC هو نصف}$$

نتيجة

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ مساحة متوازي الأضلاع ABDC هي}$$

د- خاصية

لتكن \vec{u} و \vec{v} متجهتين من الفضاء يكون $\vec{u} \wedge \vec{v}$ منعدما إذا و فقط كان \vec{u} و \vec{v} مستقيمتين

البرهان * \Rightarrow (بديهى - التعريف -)

\Leftarrow *

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} &\Leftrightarrow \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| \\ &\Rightarrow \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\sin\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \|\vec{u}\| = 0 \quad \vee \quad \|\vec{v}\| = 0 \quad \vee \quad \sin\theta = 0 \\ &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{v} = \vec{0} \quad \vee \quad \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont liés}\end{aligned}$$

ملاحظة $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ C و B و A مستقيمية
ج- الجداء المتجهي والعمليات (نقل)

$$\begin{aligned}\forall (\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \in V_3^3 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad &(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ &(\alpha \vec{u}) \wedge \vec{v} = \alpha (\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ &\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \\ &\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}\end{aligned}$$

تمرين

معلم متعامد ممنظم مباشر $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

$$\text{أحسب} \quad \vec{i} \wedge 3\vec{j} \quad (\vec{i} + 2\vec{k}) \wedge \vec{j} \quad (\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}) \wedge \vec{k} \quad (2\vec{i} - \vec{j}) \wedge (3\vec{i} + 4\vec{j})$$

تمرين

$$\vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{d} \quad ; \quad \vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \wedge \vec{d} \quad \text{لتكن}$$

بين إن $\vec{a} - \vec{d}$ و $\vec{b} - \vec{c}$ مسنقيمتان

3- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي في م.م.م مباشر.

معلم متعامد ممنظم مباشر $(o; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$

$$\begin{aligned}\vec{u}(x; y; z) \quad \vec{v}(x'; y'; z') \\ \vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}\end{aligned}$$

خاصة

الفضاء E منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ و $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$ متجهتان

من V_3

إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u} \wedge \vec{v}$ بالنسبة للأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ هو $(X; Y; Z)$ حيث

$$X = yz' - zy' \quad Y = zx' - xz' \quad Z = xy' - yx'$$

ملاحظة يمكن استعمال الوضعية التالية

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x & y & z & x \\ \hline x' & y' & z' & x' \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline z & x \\ \hline z' & x' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|} \hline Z = xy' - yx' \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline Y = zx' - xz' \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline X = yz' - zy' \\ \hline \end{array}$$

مثال نعتبر $\vec{v}(-2; -1; 1)$ $\vec{u}(1; 2; 0)$ $A(1; 2; 1)$ $B(0; -3; 2)$ $C(1; 2; 1)$
أحسب مساحة المثلث (ABC) حدد $\vec{u} \wedge \vec{v}$

III - تطبيقات الجداء المتجهي

1- معادلة مستوى معرف بثلاث نقط غير مستقيمة

خاصية

لتكن B و A و C ثلاث نقط غير مستقيمة من فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) \cdot \overline{AM}$$

مثال نعتبر $A(1;2;3)$ و $B(1;-1;1)$ و $C(2;1;2)$ حدد معادلة المستوى (ABC)

2- تقاطع مستويين

نعتبر في فضاء منسوب الى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$(P) : ax+by+cz+d=0$$

$$(P') : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

لدينا $\vec{n}(a;b;c)$ منظمية ل (P) و $\vec{n}'(a';b';c')$ منظمية ل (P')

* اذا كان (P) و (P') متقاطعين فان المستقيم (D) تقاطع (P) و (P') موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

* اذا كان $\vec{n} \wedge \vec{n}' \neq 0$ فان (P) و (P') متقاطعان وفق مستقيم موجه بـ $\vec{n} \wedge \vec{n}'$

تمرين

حدد تقاطع $(P) : x+2y-2z+3=0$ و $(P') : 4x-4y+2z-5=0$

3- مسافة نقطة عن مستقيم

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ \vec{u} , M نقطة من الفضاء و H مسقطها العمودي على (D)

$$\overline{AM} \wedge \vec{u} = (\overline{AH} + \overline{HM}) \wedge \vec{u} = \overline{HM} \wedge \vec{u} \quad \overline{AH} \perp \vec{u} \quad \text{liés}$$

$$\|\overline{AM} \wedge \vec{u}\| = \|\overline{HM} \wedge \vec{u}\| = HM \cdot \|\vec{u}\| \sin \frac{\pi}{2} = HM \cdot \|\vec{u}\|$$

$$HM = \frac{\|\overline{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

خاصية

في الفضاء (D) مستقيم مار من A و موجه بـ \vec{u} , M نقطة من الفضاء.

$$d(M;(D)) = \frac{\|\overline{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{مسافة النقطة } M \text{ عن المستقيم } (D) \text{ هي}$$

تمرين

$$d(A;(D)) = ? \quad (D) : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad A(3;2;-1)$$

تمرين

في فضاء منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر نعتبر $A(1;2;1)$ و $B(-2;1;3)$ و (D) المستقيم الذي

$$\begin{cases} x - 2y + z - 3 = 0 \\ 2x + 3y - z - 1 = 0 \end{cases} \quad \text{معادلته}$$

1- حدد $\overline{OA} \wedge \overline{OB}$ ثم حدد معادلة ديكارتية للمستوى (OAB)

2- حدد $d(A;(D))$

3- أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) التي مركزها A و مماسة للمستقيم (D)