

## درس : الجداء المتجهي

I. توجيه الفضاء – ثلاثي الأوجه – الأساس و المعلم الموجهان:

01. ثلاثي الأوجه : Trièdre

1. تعريف:

[OI] و [OJ] و [OK] ثلاثة أنصاف مستقيمت غير مستوائية من الفضاء تكون في هذا الترتيب ( الترتيب مهم ) ثلاثي أوجه يرمز له باختصار (OI,OJ,OK) أما أنصاف المستقيمت تسمى أحرفه. ([OI] حرف لثلاثي الأوجه).

02. رجل أمبير:

1. تقديم:

(OI,OJ,OK) ثلاثي أوجه ؛ نفترض شخص خيالي حيث : قدماه في النقطة O ومحمول على الحرف الثالث [OK].



وينظر إلى الحرف الأول [OI].

نهتم هل يده اليسرى توافق منحى الحرف الثاني [OJ].

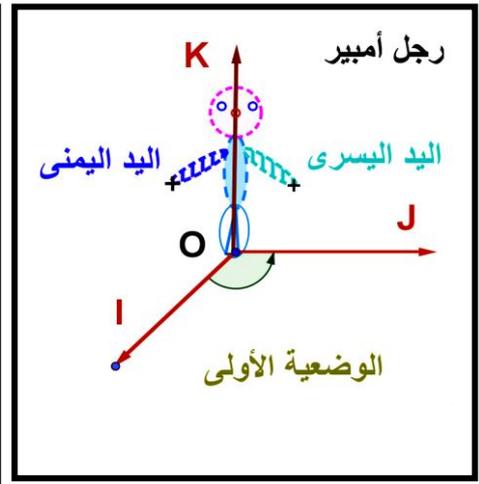
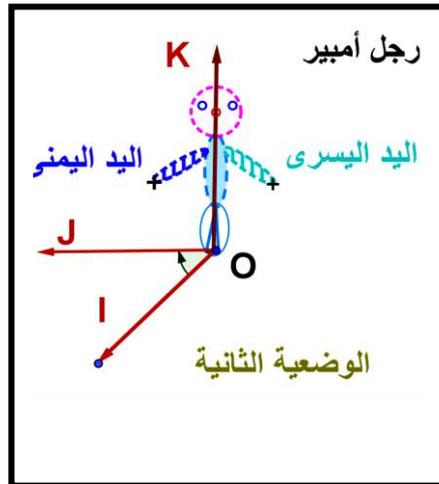
هذا الشخص يسمى رجل أمبير Bonhomme d'Ampère هناك وضعيتين للحرف [OJ]. ( أنظر الوضعية رقم 1 ثم رقم 2 )

Gravure de 1825 par [Ambroise Tardieu](#).

Données clés

Naissance [20 janvier 1775](#)  
[Lyon \(France\)](#)Décès [10 juin 1836](#) (à 61 ans)  
[Marseille \(France\)](#)Nationalité [Française](#)Champs [Mathématiques, physique](#)Institutions [École polytechnique](#)  
[Collège de France](#)Renommé pour [Théorème d'Ampère](#)

Signature



03. الأساس و المعلم الموجهان:

1. مفردات:

الوضعية التي يكون رجل أمبير محمول على الحرف [OK] و قدماه في O و ينظر إلى الحرف [OI] و الحرف [OJ] على يساره

نسمى ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشر أو موجب ( هذه الوضعية التي تهمننا في هذا الدرس )

الوضع الآخر لثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) غير مباشر أو سالب

أساس في الفضاء  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  معلم في الفضاء نضع :  $\vec{i} = \overline{OI}$  و  $\vec{j} = \overline{OJ}$  و  $\vec{k} = \overline{OK}$  إذن  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  المثلوث ( غير مستوائية ) المثلوث

الأساس  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  مباشر إذا كان ثلاثي الأوجه (OI,OJ,OK) مباشر .

في هذه الحالة المعلم  $(\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  يسمى معلم مباشر و نقول أن الفضاء موجه توجيهها مباشرة ( أو موجبا )

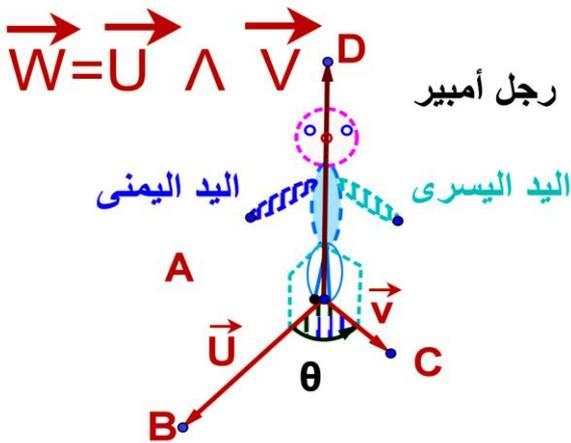
II. الجداء المتجهي لمتجهتين من الفضاء – تأويل منظمه:

01. تعريف هندسي للجداء المتجهي :

## 1. تعريف :

- الجداء المتجهي للمتجهين  $\vec{u} = \overline{AB}$  و  $\vec{v} = \overline{AC}$  متجهتين من الفضاء الموجه. تحقق ما يلي.
- الجداء المتجهي للمتجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في هذا الترتيب (أي الترتيب مهم) هو المتجهة  $\vec{w} = \overline{AD}$  و التي نرمز لها ب:  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$  التي تحقق ما يلي.
  - إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين فإن:  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .
  - إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين فإن:  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$  تحقق
  - $\vec{w}$  متعامد مع كل من  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  (أي  $\vec{w} \perp \vec{u}$  و  $\vec{w} \perp \vec{v}$ )
  - $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  أساس مباشر. ( $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ ) أساس مباشر أو ثلاثي أوجه مباشر.)
  - حيث  $\|\vec{w}\| = \|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \sin \theta$  قياس للزاوية الهندسية  $BAC$ .

## 2. مثال 1 :



## 3. مثال 2 :

نضع :  $\|\vec{u}\| = 2$  و  $\|\vec{v}\| = 5$  و  $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{6}$  أحسب :  $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ .

## 4. مثال 3 :

نعتبر المكعب  $ABCDEFGH$  حيث:

أ.  $AB = 1$ . أوجد:  $\overline{AB} \wedge \overline{HG}$  ثم  $\overline{AB} \wedge \overline{AD}$

ب.  $AB = 2$ . أوجد:  $\overline{AB} \wedge \overline{HG}$  ثم  $\overline{AB} \wedge \overline{AD}$

جواب:

أ. نجد :

$$\overline{AB} \wedge \overline{HG} = \vec{0} \quad (\text{لأنهما مستقيمتان}) \quad \overline{AB} \wedge \overline{AD} = 1 \times 1 \times \overline{AE}$$

ب. نجد :

$$\overline{AB} \wedge \overline{HG} = \vec{0} \quad (\text{لأنهما مستقيمتان}) \quad \overline{AB} \wedge \overline{AD} = 2 \times 2 \times \overline{AE}$$

## 5. نتائج :

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء ، لدينا:

$$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0} \quad \text{و} \quad \vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير منعدمتين و متعامدتين (المتلوث:  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ ) أساس متعامد مباشر.

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير منعدمتين و متعامدتين (المتلوث:  $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \wedge \vec{v})$ ) أساس متعامد منظم مباشر.

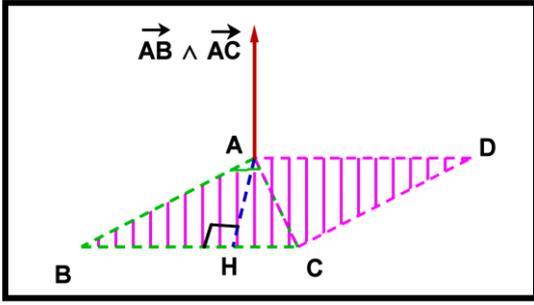
المستوى المار من النقطة  $A$  و الموجه بالمتجهتين الغير المستقيمتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  (أي  $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ ) فإن المتجهة  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  منتظمة

على المستوى  $\mathcal{P}$  ومنه:  $(\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) = \mathcal{P}(A, \vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}))$ .

$\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان مستقيمتان من الفضاء يكافئ  $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ .

تأويل منظم الجداء المتجهي لمتجهتين :

02



1. خاصية:

$$\bullet S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ هي مساحة مثلث } ABC$$

$$\bullet S_{ABCD} = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ هي مساحة متوازي الأضلاع}$$

تخالفية و خطانية الجداء المتجهي في الفضاء:

03

1. خاصية:

 $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  ثلاث متجهات من الفضاء و  $k$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:

 $\bullet$  التخالفية ( Antisymétrie )

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$$

 $\bullet$  خطانية: Bilinéarité

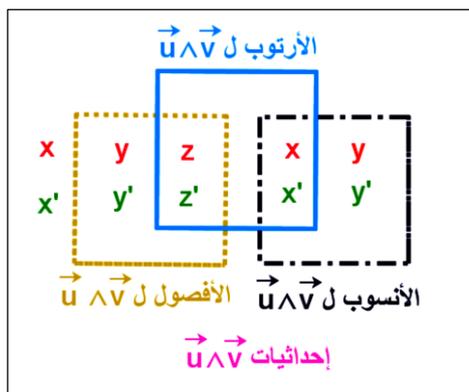
$$\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \\ (k\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \end{cases}$$

III. إحداثيات الجداء المتجهي لمتجهتين بالنسبة لأساس م.م.م. مباشر.

1. خاصية:

الفضاء منسوب إلى أساس م. م. مباشر  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . لتكن  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  و  $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$  متجهتين من الفضاء لدينا:

$$\begin{aligned} \vec{u} \wedge \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= \Delta_x \vec{i} - \Delta_y \vec{j} + \Delta_z \vec{k} \end{aligned}$$

2. مثال: تحقق بأن:  $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$  ;  $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$  ;  $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$ 3. تقنية إيجاد إحداثيات  $\vec{u} \wedge \vec{v}$  : نستعمل الوضعية التالية :

IV. مسافة نقطة عن مستقيم في الفضاء:  
1. خاصية:

$D(A, \vec{u})$  مستقيم المار من النقطة  $A$  من الفضاء و الموجه بمتجهة  $\vec{u}$  (غير منعدمة)،  $M$  نقطة من الفضاء؛ مسافة النقطة  $M$  عن المستقيم  $D(A, \vec{u})$  هي:  $d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

2. مثال:

أحسب مسافة النقطة  $M(1, 3, 0)$  عن المستقيم  $(D)$  حيث:

$$(D): \begin{cases} x = 2t \\ y = 3 - t \\ z = -1 + t \end{cases} ; t \in \mathbb{R} \text{ - أ}$$

$$(D): \frac{x+1}{3} = y = \frac{1-z}{2} \text{ - ب}$$

جواب:

$$\text{أ - } D(A(0, 3, -1), \vec{u}(2, -1, 1)) \text{ إذن } \|\vec{u}\| = \sqrt{6} \text{ و } \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 3-3 \\ 0+1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \text{ ومنه: } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{3}$$

$$\text{إذن: } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{ب - } D(A(-1, 0, 1), \vec{u}(3, 1, -2)) \text{ إذن } \|\vec{u}\| = \sqrt{6} \text{ و } \overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 3-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -5\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k} \text{ إذن: } \|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\| = \sqrt{75}$$

$$\text{وبالتالي: } d(M; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{1050}}{14}$$

V. إضافات تهم الجداء المتجهي :

## 01. الجداء المتجهي باستعمال " قاعدة اليد اليمنى "

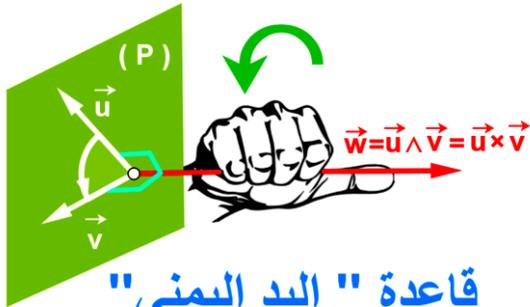
الجداء المتجهي للمتجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  (غير مستقيمتين) في هذا الترتيب هي :  
المتجهي  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$  العمودية على المستوى  $(P)$  الموجه ب  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$

حيث اتجاه  $\vec{w}$  محددة باستعمال " قاعدة اليد اليمنى "

- نغلق اليد اليمنى حيث إغلاق الأصابع يكون تبعا للاتجاه الزاوية من  $\vec{u}$  إلى  $\vec{v}$  (مع أخذ أصغر زاوية من  $\vec{u}$  إلى  $\vec{v}$ ) ( أنظر الشكل )
- ثم نضع حافة الجنبية لهذه اليد المغلقة ( التي ليس فيه الأصبع المسمى الإبهام ) على المستوى  $(P)$  . ( أنظر الشكل )
- اتجاه  $\vec{w}$  ( أو أيضا  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$  ) هو اتجاه الأصبع المسمى الإبهام . ( أنظر الشكل )

## 02. الجداء المتجهي باستعمال " بريمة إزالة سداة القنينة " règle « de tire bouchon »

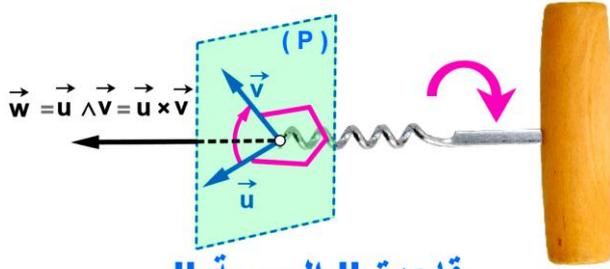
بريمة أو يزال (آلة لولبية لنزع سداة القنينة)



قاعدة " اليد اليمنى "

règle de " la main droite "

## درس : الجداء المتجهي



قاعدة " البريمة "

règle de "tire bouchon "

- نضع رأس البريمة في نقطة بداية انطلاق المتجهتين و بشكل عمودي على المستوى (P) الموجه ب  $\vec{u}$  إلى  $\vec{v}$ . (أنظر الشكل)
- نقوم بعملية دوران للبريمة تبعا للاتجاه الزاوية من  $\vec{u}$  إلى  $\vec{v}$  (مع أخذ أصغر زاوية من  $\vec{u}$  إلى  $\vec{v}$ ) (أنظر الشكل)
- اتجاه  $\vec{w}$  (أو أيضا  $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{u} \times \vec{v}$ ) هو : اتجاه تقدم خروج رأس البريمة من الجانب الأخر للمستوى (P). (أنظر الشكل)

.03 استعمال مجال مغناطيسي

