تمارين و حلول

تمرين1

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

ب/ أحسب $\int_{1}^{2}\frac{dt}{t(t+2)}dt$

2- أحسب $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{x}\sin xdx$

3- نضع $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{2}\cos^{2}xdx \quad ; \quad J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{2}\sin^{2}xdx$

أحسب $I+J$ و $I-J$ ثم استنتج I و J

1- أ/ تأكد أن $\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{1}{t(t+2)}$

$$\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}=\frac{t+2-t}{t(t+2)}=\frac{1}{t(t+2)}$$

ب/ نحسب $\int_{1}^{2}\frac{dt}{t(t+2)}dt$

$$\int_{1}^{2}\frac{1}{t(t+2)}dt=\int_{1}^{2}\frac{1}{t}-\frac{1}{t+2}dt=\left[\ln t-\ln(t+2)\right]_{1}^{2}=\ln 2-\ln 4+\ln 3=\ln\frac{3}{2}$$

2- نحسب $A=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{x}\sin xdx$

$$A=\left[e^{x}\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}e^{x}\cos xdx=\left[e^{x}\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^{x}\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-K$$

$$A=\frac{1}{2}\left(\left[e^{x}\sin x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}-\left[e^{x}\cos x\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}\right)=.........$$

3- نضع $I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{2}\cos^{2}xdx \quad ; \quad J=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{2}\sin^{2}xdx$

نحسب $I+J$

$$J+I=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{2}\sin^{2}xdx+\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{2}\cos^{2}xdx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{2}\left(\cos^{2}x+\sin^{2}x\right)dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}x^{2}dx=\left[\frac{1}{3}x^{3}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi^{3}}{24}$$

نحسب $I-J$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos^2 x dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin^2 x dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)dx$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos 2x dx=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x dx$$

$$I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\cos 2x}{2}dx$$

اذن $I-J=\left[x^2\frac{\sin 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[-x\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\left[-\frac{\sin 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$ $\qquad I-J=\frac{-\pi}{4}$

نستنتج I و J

لدينا $I-J=\frac{-\pi}{4}$ و $I+J=\frac{\pi^3}{24}$ ومنه $I=\frac{\pi^3}{48}-\frac{\pi}{8}$ و $J=\frac{\pi^3}{48}+\frac{\pi}{8}$

تمرين2

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$

-1 حدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

-2 أحسب $f'(x)$ و أعط جدول تغيرات f و أنشئ C_f

-3 حدد المساحة A_k المحصور بين C_f و محور الأفاصيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=0$; $x=k$ حيث k عدد حقيقي سالب (يمكن اعتبار $t=e^x$)

-4 حدد $\lim\limits_{k\to-\infty} A_k$

$$f(x)=e^x\left(1-e^x\right)$$

-4 نحدد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} e^x\left(1-e^x\right)=-\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} e^x\left(1-e^x\right)=0$$

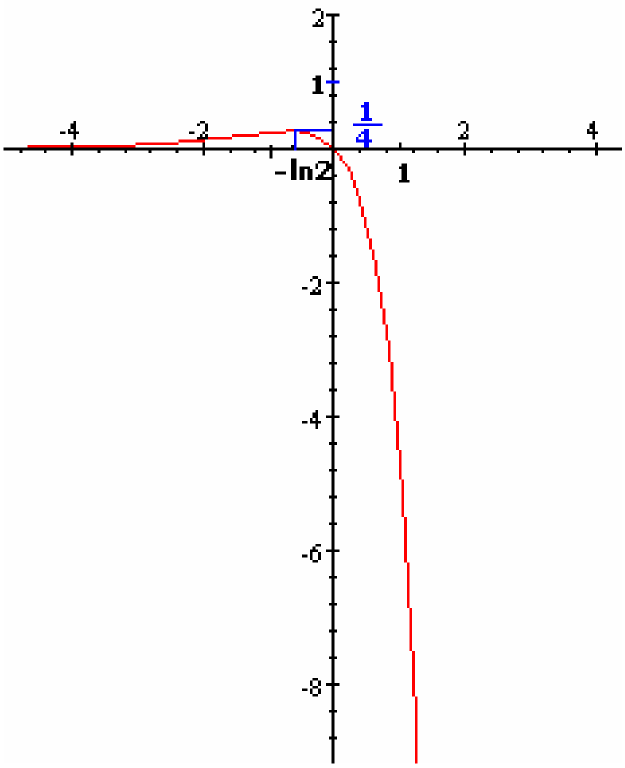
$$;\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x}\left(1-e^x\right)=-\infty$$

-5 أنسب $f'(x)$ و نعطي جدول تغيرات f و أنشئ C_f

$$f'(x)=\left[e^x-e^{2x}\right]'=e^x-2e^{2x}=e^x\left(1-2e^x\right)$$

جدول التغيرات

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	$-\infty$



6- نحدد المساحة A_k

$$A_k = \int_k^0 f(x)dx = \int_k^0 e^x - e^{2x}dx$$

$$A_k = \left[e^x - \frac{1}{2}e^{2x}\right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k}$$

4- حدد $\lim\limits_{k\to-\infty} A_k$

$$\lim_{k\to-\infty} A_k = \lim_{k\to-\infty} \frac{1}{2} - e^k + \frac{1}{2}e^{2k} = \frac{1}{2}$$