فرض محروس رقم 3

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = \frac{1}{5}$ و $U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n+1}$

1) تحقق أن $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

ثم بين أن $0 < U_n < \frac{1}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

2) تحقق أن $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1-2U_n)}{2U_n+1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

و بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) نضع $V_n = \frac{3^n U_n}{2U_n - 1}$ لكل عدد طبيعي n

أ- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $q = 6$ و أحسب V_n بدلالة n

ب- استنتج أن $U_n = \frac{2^n}{3+2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim_{n\to+\infty} U_n$

التمرين الثاني :

نعتبر في المستوى العقدي (P) المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$

النقط A , B و C لبتي ألحاقها على التوالي هي :

$a = -1-i$, $b = 5+i$ و $c = 3+7i$

1) أحسب العدد $\frac{b-a}{b-c}$ و استنتج طبيعة المثلث ABC

2) حدد d لحق النقطة D بحيث يكون الرباعي $ABCD$ متوازي أضلاع

3) تحقق أن $\frac{c-a}{d-b} = -i$ و أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ثم استنتج أن $ABCD$ مربع

التمرين الثالث :

1) حدد الشكل المثلثي لكل من العددين : $Z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ و $Z_2 = 2 - 2i$

2) استنج أن $Z_1 Z_2 = \left[2\sqrt{6}, \frac{7\pi}{12}\right]$

3) حدد الشكل الجبري للعدد $Z_1 Z_2$ ثم استنتج أن $\cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

و $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

التمرين الرابع :

الجزء (1)

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي : $f(x) = x + 1 - \ln(x+3)$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f و أحسب النهايتين $\lim_{\substack{x\to-3 \\ x>-3}} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

3) أ- بين أن المشتقة $f'(x) = \frac{x+2}{x+3}$

ب- أدرس تغيرات الدالة f ثم ضع جدول التغيرات

4) أرسم المنحنى (C_f)

الجزء (2)

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0 = 2$ و $U_{n+1} = f(U_n)$

1) أحسب U_1 ثم قارن U_1 و U_0 (نأخذ $e < 5$)

2) بين أن $-2 \le U_n \le 2 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$ (دون استعمال الحاسبة)

3) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

4) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها