

التمرين الأول

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \frac{4U_n}{2+U_n} \end{cases} \text{ لتكن } (U_n)_n \text{ متتالية عددية معرفة ب:}$$

1- تحقق أن $U_{n+1} = 4 - \frac{8}{2+U_n}$ ثم بين أن $U_n > 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ن 1.5

2- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$ ن 1

3- نضع $V_n = 1 - \frac{2}{U_n}$ لكل n من \mathbb{N}

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وأحسب V_n بدلالة n ن 1.5

ب- بين أن $U_n = \frac{6}{3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}$ وأحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ ن 1.5

التمرين الثاني :

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n} \end{cases} \text{ لتكن } (U_n)_n \text{ متتالية عددية معرفة ب:}$$

1- بين أن $U_n < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) ن 1

2- أدرس رتبة المتتالية $(U_n)_n$ ن 1

3- نضع $V_n = \frac{2}{1 - U_n}$ لكل n من \mathbb{N}

أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وأحسب V_n بدلالة n ن 1.5

ب- استنتج أن $U_n = \frac{2n-1}{2n+1}$ وأحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ ن 1.5

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f بحيث : $f(x) = x\sqrt{x^2-1}$

(1) (أ) حدد D_f وادرس زوجية الدالة f ن 1.5

(ب) أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ ن 1.5

(2) بين أن $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2-1}}$ ($\forall x > 1$) ثم أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على يمين $x_0 = 1$ ن 1

(3) بين أن $f'(x) = \frac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$ ($\forall x \in]1, +\infty[$) ثم ضع جدول تغيرات الدالة f على D_f ن 2

(4) لتكن g الدالة المعرفة على المجال $I =]1, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = f(x)$ ن 1.5

أ- بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} محددًا مجموعة تعريفها ن 1.5

ب- حل المعادلة $g(x) = x$ ثم بين أن g^{-1} قابلة للاشتقاق في النقطة $b = \sqrt{2}$ وأن $(g^{-1})'(\sqrt{2}) = \frac{1}{3}$ ن 1.5