# تصحيح الفرض رقم 1

**التمرين 01**: أحسب النهايات التالية

1) لدينا $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+1}$

ومنه $= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(2x-3)}{(x+1)(x^2-x+1)} = -\frac{5}{3}$

وعليه $\lim_{x\to -1} \frac{2x^2-x-3}{x^3+1} = -\frac{5}{3}$

2) لدينا $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1-2\sqrt{x-1}}{x-1}$

ومنه $= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} - \frac{2\sqrt{x-1}}{(x-1)}$

وعليه $= \lim_{x\to 1^+} (x+1) - \frac{2(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x-1})}$

نعلم أن $\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \sqrt{x-1} = 0^+$

ومنه $\lim_{x\to 1^+} \frac{-2}{\sqrt{x-1}} = -\infty$

ولدينا أيضا $\lim_{x\to 1^+} (x+1) = 2$

إذن $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2-1-2\sqrt{x-1}}{(x-1)} = -\infty$

3) لدينا $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}+2}$

ومنه $= \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x} - 1/\sqrt{x}\right)}{\sqrt{x}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 2/\sqrt{x}\right)}$

بما أن $\lim_{x\to +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}} = 0$

وكذلك $\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0$

و $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

إذن $\lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x+1}+2} = +\infty$

4) لدينا $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{2x}-2}{\sqrt{x}-2}$

ومنه $= \lim_{x\to 4} \frac{2x-8}{(\sqrt{x}-2)\left(\sqrt[3]{2x}^2 + 2\sqrt[3]{2x} + 2^3\right)}$

وعليه $= \lim_{x\to 4} \frac{2(\cancel{x-4})(\sqrt{x}+2)}{(\cancel{x-4})\left(\sqrt[3]{2x}^2 + 2\sqrt[3]{2x} + 2^3\right)}$

$= \lim_{x\to 4} \frac{2(\sqrt{x}+2)}{\sqrt[3]{2x}^2 + 2\sqrt[3]{2x} + 2^3} = \frac{1}{2}$

إذن $\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt[3]{2x}-8}{\sqrt{x}-2} = \frac{1}{2}$

**التمرين 02**

نعتبر الدالة العددية $f$ المعرفة على المجال $]1,2[$ بما يلي: $f(x) = \sqrt{x}(x-1)-1$

- لدينا $x \mapsto x-1$ متصلة على $]1,2[$

و $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $]1,2[$

إذن $f$ دالة متصلة على $]1,2[$ لأنها جداء دالتين متصلتين

- ولدينا $f(1) = -1$

و $f(2) = -1+\sqrt{2}$

إذن $f(1)\times f(2) < 0$

وحسب مبرهنة القيم الوسطية يوجد على الأقل عنصر $\alpha$ من المجال $]1,2[$ بحيث

$$f(\alpha) = 0$$

أي $\sqrt{\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$

من إنجاز التلميذة:

فاطمة الزهراء جدي.

التمرين 03

لدينا $f(x) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

1) أ. لنحدد $D_f$

$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \neq 0 , x \geq 0\}$

أي $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0\}$

$D_f = ]0, +\infty[$

ب. لنحسب $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

لدينا $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$= \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = 1$

لنحسب $\lim_{x \to 0^+} f(x)$

لدينا $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$

بما أن $\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0^+$

فإنه $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

وعليه $\lim_{x \to 0^+} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 = +\infty$

2) أ- لنبين أن

$(\forall x \in ]0, +\infty[) ; f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

لدينا $f'(x) = \left(\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3\right)'$

$f'(x) = 3\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)'$

$f'(x) = 3\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 \left(\frac{-1}{2x\sqrt{x}}\right)$

إذن $f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

ب: لدينا $f'(x) = \frac{-3}{2x\sqrt{x}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $+\infty$ ↘ | $1$ |

اذن f تناقصية قطعا على $]0, +\infty[$

3) لنبين أن f تقبل دالة عكسية $f^{-1}$ معرفة على J

لدينا f دالة متصلة وتناقصية قطعا على $]0, +\infty[$ ، إذن f تقبل دالة عكسية معرفة على J بحيث

$J = f]+\infty, 0[ = ]\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to 0} f(x)[$

$= ]1, +\infty[$

4) لنحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x$

$\iff \left(1 + \frac{1}{\sqrt{y}}\right)^3 = x$

$\iff 1 + \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x}$

$\iff \frac{1}{\sqrt{y}} = \sqrt[3]{x} - 1$

$\iff \sqrt{y} = \frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}$

$\iff y = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}\right)^2$

إذن $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x} - 1}\right)^2$ لكل x من $]1, +\infty[$