

التمرين الأول:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2 = -2(2+3i) \\ b-2a = -4(1-5i) \\ -2b = 16(1-i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 - 2(2+3i) = -2(1+3i) \\ b = -8(1-i) \end{cases}$$

وبالتالي : $P(z) = (z-2)(z^2 - 2(1+3i)z - 8(1-i))$
-1 ج لدينا :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2 - 2(1+3i)z - 8(1-i)) = 0$$

$$\Leftrightarrow z-2 = 0 \text{ أو } z^2 - 2(1+3i)z - 8(1-i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 2 \text{ أو } z^2 - 2(1+3i)z - 8(1-i) = 0 \quad (*)$$

لنحل المعادلة (*):

$$\Delta' = b^2 - ac = (1+3i)^2 + 8(1-i) = -2i = (1-i)^2 \text{ لدينا :}$$

$$z_1 = (1+3i) + (1-i) = 2+2i \text{ ومنه :}$$

$$z_2 = (1+3i) - (1-i) = 4i \text{ و}$$

$$S = \{2, 2+2i, 4i\} \text{ وبالتالي}$$

-2 لدينا $z_0 z_2 = 8i$ و $z_1^2 = (2+2i)^2 = 8i$ أي $z_1^2 = z_0 z_2 = 8i$
إن z_0 و z_1 و z_2 حدود متتابعة من متتالية هندسية .

وبما أن $u_0 = z_0$ فإن $u_1 = z_1$ وبالتالي $q = \frac{z_1}{z_0} = 1+i$

$$u_{16} = u_0 q^{16} = 2(1+i)^{16} = 2(2i)^8 = 2^9 i^8 = 2^9 \text{ و}$$

-3 النقطة G مرجح النقط المتزنة $(A,1)$ و $(B,-1)$ و $(C,1)$

$$\vec{GA} - \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \text{ يعني}$$

$$(z_A - z_G) - (z_B - z_G) + (z_C - z_G) = 0 \text{ يكافئ}$$

$$z_G = z_A - z_B + z_C \text{ يكافئ}$$

$$z_G = 2i \text{ يكافئ}$$

التمرين الثالث:

$$I_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx \text{ لدينا -1}$$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \text{ نضع :}$$

$$I_1 = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx \text{ ومنه}$$

$$I_1 = \left[-x e^{-x} \right]_0^1 + \left[-e^{-x} \right]_0^1 \text{ أي}$$

$$I_1 = 1 - \frac{2}{e} \text{ بالتالي}$$

-2 لكل $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ لدينا $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$

$$\begin{cases} u(x) = x^n \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = n x^{n-1} \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \text{ نضع :}$$

$$I_n = \left[-x^n e^{-x} \right]_0^1 + n \int_0^1 x^{n-1} e^{-x} dx \text{ ومنه}$$

$$I_n = n I_{n-1} - \frac{1}{e} \text{ أي}$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \quad (t \in \mathbb{R}) : (D) \\ z = 1-t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = -1+t \\ z = 1-t \end{cases} \text{ -2 لتحديد احداثيات النقطة } B \text{ نحل النظام:}$$

$$x + y - z - 2 = 0$$

$$(1+t) + (-1+t) - (1-t) - 2 = 0 \text{ ومنه}$$

أي $t = 1$ وبالتالي احداثيات نقطة التقاطع هي $B(2,0,0)$.

-3 أ معادلة ديكارتية للفلكة (S) هي :

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{7})^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 4 = 0 \text{ أي}$$

$$\text{-3 ب لدينا } d(A, (P)) = \frac{|1-1-1-2|}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} < \sqrt{7}$$

ومنه المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة

مركزها: هو المسقط العمودي للنقطة A على المستوى (P) أي تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) أي النقطة B .

$$\text{شعاعها: } r' = \sqrt{r^2 - d^2} = \sqrt{7-3} = 2$$

-4 معادلة ديكارتية لمستوى (Q) موازي للمستوى (P) نكتب على شكل $x + y - z + d = 0$

المستوى (Q) ممس للفلكة (S) يكافئ $d(A, (Q)) = 2$

$$d(A, (Q)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|1-1-1+d|}{\sqrt{3}} = \sqrt{7} \text{ ولدينا :}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1+d|}{\sqrt{3}} = \sqrt{7}$$

$$\Leftrightarrow |-1+d| = \sqrt{21}$$

$$\Leftrightarrow -1+d = \sqrt{21} \text{ أو } -1+d = -\sqrt{21}$$

$$\Leftrightarrow d = 1 + \sqrt{21} \text{ أو } d = 1 - \sqrt{21}$$

ومنه معادلتا المستويين الموازيين للمستوى (P) والمماسين للفلكة

$$x + y - z + 1 + \sqrt{21} = 0 \text{ هما : } (S)$$

$$\text{و } x + y - z + 1 - \sqrt{21} = 0$$

التمرين الثاني:

لدينا : $P(z) = z^3 - 2(2+3i)z^2 - 4(1-5i)z + 16(1-i)$

$$\begin{aligned} \text{-1 أ- لدينا } P(2) &= 2^3 - 2(2+3i)2^2 - 4(1-5i)2 + 16(1-i) \\ &= 8 - 8(2+3i) - 8(1-5i) + 16(1-i) \\ &= 8(1-2-3i-1+5i+2-2i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه $z_0 = 2$ جذر للحدودية P .

-1 ب لدينا :

$$\begin{aligned} P(z) &= (z-2)(z^2 + az + b) \\ &= z^3 + (a-2)z^2 + (b-2a)z - 2b \end{aligned}$$

جدول تغيرات الدالة g :

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-		+
$g(x)$	$+\infty$	2	$+\infty$

3- لدينا 2 قيمة دنيا للدالة g أي أن لكل x من IR^{*+} $g(x) \geq 2$ وبالتالي لكل x من IR^{*+} $g(x) > 0$.

الجزء الثاني :

1- لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{x+1}{x} \ln(x)} = 0$

ومنه $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$

إذن الدالة f متصلة على اليمين في النقطة 0.

لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x+1}{x} \ln(x)} = +\infty$

أ لكل x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا :

$$f(x) = e^{\frac{x+1}{x} \ln(x)} = e^{(1+\frac{1}{x}) \ln(x)} = e^{\ln(x) + \frac{1}{x} \ln(x)} = e^{\ln(x)} e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$$

$$= x e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$$

وبالتالي $\frac{f(x)}{x} = e^{\frac{1}{x} \ln(x)}$

2- ب لدينا :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x} \ln(x)} = 0$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0

تأويل هندسي : منحني الدالة f يقبل نصف مماس أفقي في النقطة 0 أصل المعلم.

2- ج لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\ln(x)}{x}} = 1$

2- د لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{\ln(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x e^{\frac{\ln(x)}{x}} - x}{\ln(x)}$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1)}{\ln(x)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{\ln(x)}{x}} - 1}{\frac{\ln(x)}{x}}$$

نضع : $t = \frac{\ln(x)}{x}$

لدينا : $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow 0$

ومنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{\ln(x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$

استنتاج : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{\ln(x)} \ln(x) = +\infty$

منحني الدالة f يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه المستقيم ذي المعادلة $y = x$

2- ب حسب العلاقة الأخيرة لدينا

$$I_2 = 2I_1 - \frac{1}{e} = 2(1 - \frac{2}{e}) - \frac{1}{e}$$

$$I_2 = 2 - \frac{5}{e} \quad \text{أي}$$

$$I_3 = 3I_2 - \frac{1}{e} = 3(2 - \frac{5}{e}) - \frac{1}{e} \quad \text{و}$$

$$I_3 = 6 - \frac{16}{e} \quad \text{أي}$$

2- ج لدينا : $\int_0^1 (2x^3 - 4x^2) e^{-x} dx = \int_0^1 (2x^3 e^{-x} - 4x^2 e^{-x}) dx$

$$= 2 \int_0^1 x^3 e^{-x} dx - 4 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx$$

$$= 2I_3 - 4I_2$$

$$= 2(6 - \frac{16}{e}) - 4(2 - \frac{5}{e})$$

$$= 4(1 - \frac{3}{e})$$

3- أ لدينا : $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^n (x-1) e^{-x} dx$

و بما أن الدالة $x \rightarrow x^n (x-1) e^{-x}$ سالبة على المجال $[0,1]$

فإن $\int_0^1 x^n (x-1) e^{-x} dx < 0$ ومنه المتتالية $(I_n)_{n \in IN^*}$ تناقصية.

ولدينا لكل $n \in IN^*$ الدالة $x \rightarrow x^n e^{-x}$ موجبة على المجال $[0,1]$

إذن $\int_0^1 x^n e^{-x} dx > 0$ أي $I_n > 0$

ومنه المتتالية $(I_n)_{n \in IN^*}$ مصغورة بالعدد 0.

3- ب بما أن المتتالية $(I_n)_{n \in IN^*}$ تناقصية و مصغورة بالعدد 0 فإنها متقاربة.

3- ج لدينا على المجال $[0,1]$ $e^{-x} \leq 1$

ومنه $x^n e^{-x} \leq x^n$ لكل $n \in IN^*$

وبالتالي $\int_0^1 x^n e^{-x} dx \leq \int_0^1 x^n dx$

أي $I_n \leq \frac{1}{n+1}$

بما أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ و $0 < I_n \leq \frac{1}{n+1}$

فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

المسألة :

الجزء الأول :

1- لدينا $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{w \rightarrow 0^+} x + 1 - \ln(x) = +\infty$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 - \ln(x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x})$$

$$= +\infty$$

2- لكل x من IR^{*+} لدينا $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

ومنه إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$ على المجال $]0, +\infty[$

5- أبا أن الدالة g متصلة و موجبة على المجال $[1, \lambda]$ حيث $\lambda > 1$

$$A(\lambda) = \int_1^\lambda g(x) dx \quad \text{فإن: (أنظر الجزء 1ء)}$$

$$= \int_1^\lambda (x+1 - \ln(x)) dx$$

$$= \left(\int_1^\lambda (x+1) dx - \int_1^\lambda \ln(x) dx \right)$$

$$= \left(\left[\frac{1}{2}x^2 + x \right]_1^\lambda - [x \ln(x) - x]_1^\lambda \right)$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + x - x \ln(x) + x \right]_1^\lambda$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2x - x \ln(x) \right]_1^\lambda$$

$$= \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + 2\lambda - \lambda \ln(\lambda) - \frac{5}{2} \right)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\lambda^2 + 2\lambda - \lambda \ln(\lambda) - \frac{5}{2} \right)$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\lambda} - \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} - \frac{5}{2\lambda^2} \right)$$

$$= +\infty$$

الجزء الثالث:

1- لنبين بالترجع أن $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n < e$

من أجل $n = 0$ لدينا $u_0 = 1$ أي $1 \leq u_0 < e$

ليكن n من \mathbb{N} نفترض أن $1 \leq u_n < e$ ونبين أن $1 \leq u_{n+1} < e$

لدينا g دالة تزايدية على المجال $[1, +\infty[$ (أنظر س2 من الجزء 1ء)

ومنه $g(1) \leq g(u_n) < g(e)$ وهذا يعني $2 \leq u_{n+1} < e$

وبالتالي $1 \leq u_{n+1} < e$

وحسب مبدأ التراجع $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1 \leq u_n < e$

2- لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية

لكن n من \mathbb{N} لدينا: $u_{n+1} - u_n = g(u_n) - u_n$

$$= u_n + 1 - \ln(u_n) - u_n$$

$$= 1 - \ln(u_n)$$

وبما أن $u_n < e$ فإن $\ln(u_n) < \ln(e)$ أي $\ln(u_n) < 1$

وبالتالي $1 - \ln(u_n) > 0$

ومنه المتتالية (u_n) تزايدية قطعاً.

3- بما أن المتتالية (u_n) تزايدية ومكبورة بالعدد e فهي متقاربة.

لدينا g متصلة على المجال $]0, +\infty[$ و تزايدية على $[1, +\infty[$

ومنه g متصلة على المجال $[1, e]$ لأن $[1, e] \subset]0, +\infty[$

و تزايدية على المجال $[1, e]$ لأن $[1, e] \subset [1, +\infty[$

وبالتالي: $g([1, e]) = [2, e] \subset [1, e]$

وبما أن (u_n) متقاربة فإن نهايتها l تحقق المعادلة $g(l) = l$

$$g(l) = l \Leftrightarrow l + 1 - \ln(l) = l$$

$$\Leftrightarrow 1 - \ln(l) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(l) = 1$$

$$\Leftrightarrow l = e$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e \quad \text{ومنه}$$

3- لكل x من المجال $]0, +\infty[$ لدينا: $f'(x) = (e^{\frac{x+1}{x} \ln(x)})'$

$$= \left(\frac{x+1}{x} \ln(x) \right)' e^{\frac{x+1}{x} \ln(x)}$$

$$= \left(\left(\frac{x+1}{x} \right)' \ln(x) + \frac{x+1}{x} \ln'(x) \right) f(x)$$

$$= \left(\frac{-1}{x^2} \ln(x) + \frac{x+1}{x^2} \right) f(x)$$

$$= \frac{x+1 - \ln(x)}{x^2} f(x)$$

$$= \frac{g(x)}{x^2} f(x)$$

وبما أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$ (حسب س3 من ج1)

فإن $f'(x) \geq 0$ لكل x من $]0, +\infty[$.

جدول تغيرات الدالة f .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

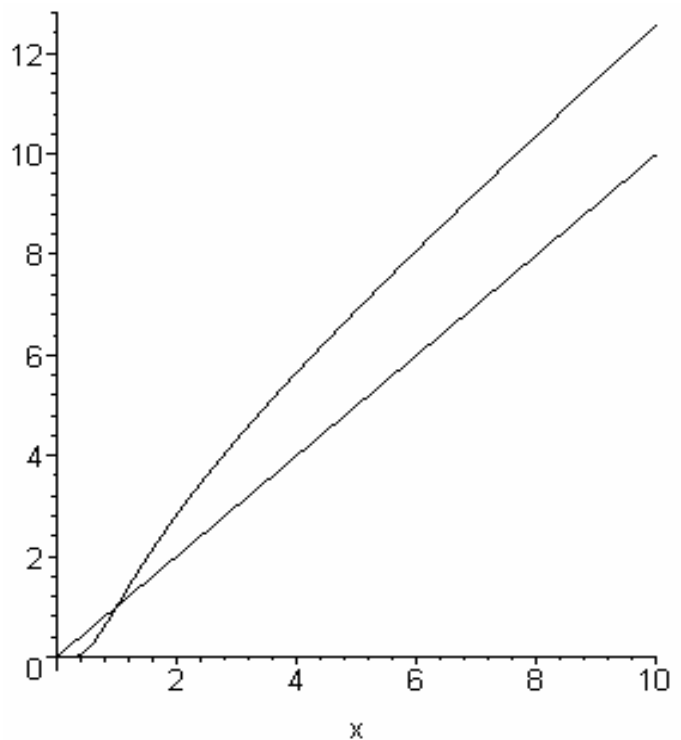
4- أحساب $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$

$$f(1) = e^{\frac{1}{2} \ln(1)} = e^0 = 1$$

$$f(2) = e^{\frac{3}{2} \ln(2)} = e^{\ln(2^{\frac{3}{2}})} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$f(3) = e^{\frac{4}{3} \ln(3)} = e^{\ln(3^{\frac{4}{3}})} = 3^{\frac{4}{3}}$$

4- ب منحنى الدالة f .



الرسم تم باستعمال Logiciel Maple 9.5