

تمرين 1

1- حدد الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية

$$\frac{2i}{2-i} + \frac{(1-2i)^2}{i} ; \frac{3-2i}{1+i} ; \frac{1}{3-2i}$$

2- أحسب $(1+i)^2$ واستنتج $(1+i)^{230}$

3- أحسب $\sum_{k=0}^{521} i^k$

تمرين 2

في المستوى العقدي نعتبر النقط $A(1)$ و $B(z)$ و $C(-iz)$

1- نضع $z = x + iy$ حيث $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ و $i \neq z$ و $z \neq 1$

حدد الشكل الجبري للعديدين $\frac{1-i \cdot \bar{z}}{i+i \cdot z}$ و $\frac{1-z}{1+iz}$

2- حدد مجموعة النقط B حيث A و B و C نقط مستقيمة

3- حدد مجموعة النقط B حيث $\frac{1-i \cdot \bar{z}}{i+i \cdot z}$ عدد تخيلي

صرف.

تمرين 3

حل في \mathbb{C} المعادلات التالية $-2i \cdot \bar{z} + z = 1$ و $(1-i)z - 2\bar{z} = 1 - 5i$

و $2|z|^2 - z^2 = 3$ و $z \cdot \bar{z} + \bar{z} = 4 - 3i$

تمرين 4

في المستوى العقدي حدد مجموعة النقط $M(z)$ في كل حالة من الحالتين التاليتين

1- $|z-1+i|=3$ و 2- $|z-2|=|z+2i|$

تمرين 5

أكتب على الشكل المثلي الأعداد عقدية $3 + i\sqrt{3}$ و $\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}$ و $(1-i\sqrt{3})^{24}$

تمرين 6

نعتبر العددين العقدين $v = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$ و $u = 2 - 2i$

1- احسب معيار وعمدة كل من u و v

2- حدد الكتابة الجبرية والكتابة المثلية ل $\frac{u}{v}$ ثم استنتج $\cos \frac{7\pi}{12}$; $\sin \frac{7\pi}{12}$

تمرين 7

نضع $u = -2 + 2i$

1- أحسب معيار وعمدة u

2- حل جبريا $z^2 = u$ و استنتج $\cos \frac{3\pi}{8}$; $\sin \frac{3\pi}{8}$

تمرين 8

نعتبر العدد العقدي $z = 1 + i\sqrt{3}$

بين أن النقط $A(z)$ و $B(-z)$ و $C(z^2)$ و $D\left(\frac{2}{z}\right)$ متداورة

تمرين 9

1- ليكن $z_0 = \left[1; \frac{2\pi}{5}\right]$ نضع $\alpha = z_0 + z_0^4$ و $\beta = z_0^2 + z_0^3$

أ- بين أن $1 + \alpha + \beta = 0$

ب- استنتج أن α و β حلبي المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$

2- أ- حدد α بدلالة $\cos \frac{2\pi}{5}$

ب- حل المعادلة $x^2 + x - 1 = 0$ واستنتج $\cos \frac{2\pi}{5}$

ج- أنشئ النقط $A_0(1)$ و $A_1(z_0)$ و $A_2(z_0^2)$ و $A_3(z_0^3)$ و

$A_4(z_0^4)$ و حدد طبيعة $A_0A_1A_2A_3A_4$

تمرين 10

المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم

$(O; \vec{i}, \vec{j})$. نعتبر النقط $I; A; B$ التي أحاقها على التوالي

هي $1; 1-2i; -2+2i$. لتكن (C) الدائرة التي أحد أقطارها هو $[AB]$.

1) أنشئ النقط $I; A; B$.

2) حدد z_Ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة (C) . احسب شعاع الدائرة (C) .

3) لتكن D النقطة ذات اللحق $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$.

حدد الشكل الجبري للعدد z_D ثم بين أن النقطة D تنتمي للدائرة (C) .

3) لتكن E ، النقطة ذات اللحق z_E ، التي تنتمي للدائرة

(C) و التي تحقق $\left(\overline{\Omega I}, \overline{\Omega E}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.

4) أ- حدد معيار وعمدة العدد $z_E + \frac{1}{2}$.

ب- استنتج أن $z_E = \frac{5\sqrt{2}-2}{4} + \frac{5\sqrt{2}}{4}i$

تمرين 11

نضع: $v = \frac{5-3iz}{2+iz}$ لكل z من $\mathbb{C} - \{2i\}$ و لتكن النقطة

$M(z)$ صورة z في المستوى العقدي.

1) بين أن: $(\forall z \in \mathbb{C} - \{2i\}), v \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$

2) استنتج مجموعة النقط $M(z)$ بحيث يكون $v \in \mathbb{R}$.

تمرين 12ليكن $(x; \alpha) \in \mathbb{R}^2$

$$C_n = \sum_{k=0}^n \sin(x+k\alpha) \quad \text{و} \quad S_n = \sum_{k=0}^n \cos(x+k\alpha)$$

أحسب C_n و S_n (يمكن حساب $C_n + iS_n$)

تمرين 13

$$C_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right)$$

اختصر الكتابة

تمرين 14

$$\alpha \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

ليكن

نعتبر المعادلة (E):

$$z \in \mathbb{C} \quad (1+iz)^3 (1-i \tan \alpha) = (1-iz)^3 (1+i \tan \alpha)$$

1- ليكن z_0 حل للمعادلة (E)أ- بين أن $|1+iz_0| = |1-iz_0|$ ب- استنتج أن z_0 عدد حقيقي

$$2- \text{أ- أحسب } \frac{1+i \tan \alpha}{1-i \tan \alpha} \text{ بدلالة } e^{i\alpha}$$

$$\text{ت- نضع } z = \tan \theta \text{ حيث } \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\text{ . استنتج حلول}$$

المعادلة (E)

تمرين 15نعتبر في \mathbb{C} المعادلة

$$(E): z^2 + 2(1 + \cos \theta)z + 2(1 + \cos \theta) = 0 \quad \text{حيث}$$

$$\theta \in]-\pi; \pi[$$

1- حل المعادلة (E)

2- أحسب معيار و عمدة جذري المعادلة (E) (ناقش حسب

قيم θ)**تمرين 16**

$$u = \frac{\bar{z}(z-i)}{\bar{z}+i}$$

لكل عدد عقدي مخالف لـ i نضع

$$1- \text{اثبت أن } [2\pi] \arg u = -\arg z + 2\arg(z-i) \quad \forall z \in \mathbb{C} - \{i\}$$

$$\text{و أن } |u| = |z|$$

$$2- \text{بين إذا كان } |z|=1 \text{ فإن } u = -i$$

3- حدد مجموعة النقط $M(z)$ حيث u تخيلي صرف.**تمرين 17**

$$1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة (E): } z^2 + z + 1 = 0$$

$$2) \text{ نعتبر في } \mathbb{C} \text{ المعادلة (F): } z^2 = \bar{z}$$

أ- بين أنه إذا كان z حلا للمعادلة (F) فإن $z=0$ أو $|z|=1$ ب- بين أن المعادلة (F) تكافئ المعادلة: $z^3 = 1$ أو $z=0$ 3) حل المعادلة (F) في \mathbb{C} .

$$(z-1)^6 + (z-1)^3 + 1 = 0$$

تمرين 181- حل في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} المعادلة:

$$z^2 - 8z + 17 = 0$$

2- نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية \mathbb{C} الحدودية

$$P(z) = z^3 + (-8+i)z^2 + (17-8i)z + 17i$$

a. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا.b. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث:

$$P(z) = (z+i)(az^2 + bz + c)$$

c. حل في \mathbb{C} المعادلة $P(z)$ **تمرين 19**

$$1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة: } z^2 + 2z + 4 = 0 \quad (E)$$

2) اكتب حلي المعادلة (E) على الشكل المثلثي.

3) نعتبر في المستوى العقدي النقط A و B و C التي أحاقها

على التوالي هي $z_A = 2$ و $z_B = -1 + i\sqrt{3}$ و

$$z_C = -1 - i\sqrt{3}$$

$$\text{أ- بين أن: } \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$$

ب- استنتج طبيعة المثلث ABC.

تمرين 20نعتبر في \mathbb{C} الحدودية: $P(z) = z^3 + (3-i)z^2 + (6-2i)z + 4-4i$

$$1) \text{ حل في } \mathbb{C} \text{ المعادلة } z^2 + 2z + 4 = 0$$

$$2) \text{ بين أن } z_0 = -1 + i \text{ حل للمعادلة: } P(z) = 0$$

$$3) \text{ أ- تحقق من أن: } P(z) = (z+1-i)(z^2 + 2z + 4)$$

ب- استنتج الحلين الآخرين z_1 و z_2 للمعادلة: $P(z) = 0$ ج- حدد الترميز الأسّي لـ z_0 و z_1 و z_2 . (حيث $\Im_m(z_1) > 0$).4) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م. (O, \vec{u}, \vec{v}) ,نعتبر النقط A و B و C التي أحاقها هي على التوالي z_0 و z_1 و z_2

بين أن النقط A و B و C مستقيمية

5) نعتبر الدوران R الذي مركزه O و زاويته $\frac{\pi}{6}$. لتكن $M(z)$ نقطة من المستوى $(M \neq O)$ ، و النقطة $M'(z')$ صورتها

بالدوران R.

$$\text{أ- بين أن: } \left| \frac{z'}{z} \right| = 1 \quad \text{و} \quad \arg \frac{z'}{z} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\text{ب- استنتج أن: } z' = e^{i\frac{\pi}{6}} z \quad (\text{الكتابة العقدية لـ } R)$$

ج- حدد لحق كل من A' و B' صورتي A و B بالدوران R**تمرين 21**

$$1- \text{بين أن } 1 + e^{i\theta} = 2e^{i\frac{\theta}{2}} \cos \frac{\theta}{2}$$

$$2- \text{أحسب بدلالة } \tan \theta \text{ العدد } \frac{e^{i2\theta} - 1}{e^{i2\theta} + 1}$$

تمرين 22

$$\text{بين أن } e^{i\frac{\pi}{11}} + e^{i\frac{3\pi}{11}} + e^{i\frac{5\pi}{11}} + e^{i\frac{7\pi}{11}} + e^{i\frac{9\pi}{11}} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{22}}}{2 \sin \frac{\pi}{22}}$$

$$\text{استنتج } \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}$$

تمرين 23

1) حل في C المعادلة : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
 2) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية C الحدودية :
 $P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + \sqrt{3}i)z - 8i$
 أ- احسب $P(2i)$.

ب- حدد العددين b و c بحيث : $P(z) = (z - 2i)(z^2 + bz + c)$
 ج- حل في C المعادلة $P(z) = 0$

3) في المستوى العقدي المنسوب إلى م.م.م. $(0, \vec{u}, \vec{v})$
 نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي هي :
 $z = \sqrt{3} - i$ و $z_B = \sqrt{3} + i$ و $z_C = 2i$

ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$.

أ- اكتب على الشكل المثلي $\frac{z_C}{z_B}$ و $\frac{z_B}{z_A}$

ب- بين أن الكتابة العقدية للدوران R هي : $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z$
 ت- بين أن $R(A) = B$ و $R(B) = C$
 ج- بين أن الرباعي OABC معين.

تمرين 24

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C و D و E التي ألقاها على التوالي هي : $z_A = 1 - i$ و $z_B = 3 + i$

و $z_C = -3$ و $z_D = 2$ و $z_E = -4$.

نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث : $z' = (1+i)z + 1$

1) حدد A' و B' صورتين النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ- بين أن OMEM' متوازي الأضلاع إذا، فقط إذا، كان $z^2 - 3z + 3 = 0$

ب- حل في المجموعة C المعادلة $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3) أ- عبر عن $z' + 4$ بدلالة $z - 2$.

ب- استنتج أن $|z' + 4| = |z - 2|^2$ ثم عبر $\arg(z' + 4)$ بدلالة $\arg(z - 2)$.

ج- بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D وشعاعها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها وشعاعها.

تمرين 25

نعتبر $t \in \left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ و المعادلة (E) التالية :

$$(E): z \in \mathbb{C} \quad z^2 \cos^2 t - 4z \cos t + 5 - \cos^2 t = 0$$

1- حل المعادلة (E)

2- المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O; \vec{u}; \vec{v})$

M_1 و M_2 هما صورتا حل المعادلة (E) في المستوى العقدي

حدد مجموعة النقط M_1 و M_2 عندما يتغير t

في $\left] \frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ و أنشئها في المعلم $(O; \vec{u}; \vec{v})$

تمرين 26

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}; \vec{v})$ نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي

هي : $z_A = 4 + i$; $z_B = 4 - i$; $z_C = -i$

1. مثل النقط A و B و C

2. لتكن Ω النقطة ذات اللحق 2 . نسمي S صورة النقطة A بالدوران الذي مركزه Ω وزاويته $\frac{\pi}{2}$. حدد لحق النقطة S.

1. بين أن النقط A و B و S و C تنتمي إلى نفس دائرة (Γ)
 ينبغي تحديد مركزها وشعاعها . أرسم (Γ).

تمرين 27

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقهما على

التوالي هما : $z_A = i$; $z_B = 2$

I- حدد لحق النقطة B_1 صورة النقطة B بالتحاكي الذي

مركزه A ونسبته $\sqrt{2}$.

1) حدد لحق النقطة B'_1 صورة النقطة B_1 بالدوران الذي

مركزه A وزاويته $\frac{\pi}{4}$.

2) مثل النقط A و B و B'.

II - نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M لحقها

z بالنقطة M' ذات الحق z' بحيث : $z' = (1+i)z + 1$.

1) حدد A' و B' صورتين النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي.

2) أ- بين أنه $\frac{z' - z}{i - z} = -i$ لكل z مخالف للعدد i.

ب- بين أن : $\left\{ \frac{MM'}{MA} \right\} = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ لكل نقطة M مخالفة للنقط A.

ج- استنتج طريقة لإنشاء النقطة M' انطلاقاً من النقطة M حيث $M \neq A$.

3) حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث :

$$|z - 2| = \sqrt{2}$$

4) أ- بين أن : $(1+i)(z-2) = z' - 3 - 2i$ لكل عدد

عقدي z.

ب- استنتج أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى (Γ)

فإن النقطة M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها

تمرين 28

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم
 $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ، نعتبر النقط :

النقطة A ذات اللحق $a = 7 - i\sqrt{3}$

النقطة B ذات اللحق $b = 5 + 3i\sqrt{3}$

النقطة Q منتصف القطعة [OB] .

(1) أ- ليكن R الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{\pi}{3}$. حدد

الكتابة العقدية للدوران R .

ب- بين أن $R(A) = B$ ثم استنتج طبيعة أن المثلث OAB .

(2) حدد q لحق النقطة Q .

(3) حدد k لحق النقطة K بحيث يكون ABQK متوازي الأضلاع .

(4) بين أن $\frac{k-a}{k}$ تخيلي صرف . ما ذا نستنتج بالنسبة للمثلث OKA ؟

(5) لتكن C النقطة ذات اللحق $c = \frac{2a}{3}$ ؟

أ- أحسب $\frac{k-b}{k-c}$.

ب- ما ذا نستنتج بالنسبة للنقط B و C و K ؟

تمرين 29

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر
 $(O; \vec{u}; \vec{v})$. لتكن $A(-2+3i)$ و $B(1-3i)$ نقطتين .

نعتبر $M(z)$ حيث $z \neq -2+3i$ نضع $z' = \frac{z-1+3i}{z+2-3i}$

1- أ- حدد علاقة بين عمدة z' و الزاوية الموجهة $(\widehat{MA; MB})$

ب- حدد وأنشئ المجموعتين

$$(E_1) = \left\{ M(z) / \arg(z') \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \right\}$$

$$(E_2) = \{ M(z) / |z'| = 2 \}$$

2- حدد لحق النقطة المشتركة K للمجموعتين E_1 و E_2

تمرين 30

(1) حل في مجموعة الأعداد العقدية كل من المعادلتين التاليتين
 أ- $z^4 = 1$ (يمكن ملاحظة أن $(z^2+1)(z^2-1) = z^4 - 1$)

$$ب- \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^4 = 1$$

(2) ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم وليكن A عددا عقديا .
 نعتبر المعادلة ذات المجهول العقدي z :

$$(E) : \left(\frac{z-i}{z+i} \right)^n = A$$

P و Q و M هي النقط ذات الألحاق i و -i و z على التوالي .

أ- بين أنه إذا كان z حل للمعادلة (E) فإن $\frac{MP}{MQ} = \sqrt[n]{|A|}$

ب- بين أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي على الأقل فإن

$$|A| = 1$$

ج- استنتج أنه إذا كان للمعادلة (E) حل حقيقي فإن جميع

حلولها حقيقية .

تمرين 31

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم .
 $(O; \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقطتين A و B اللتان لحقاها على

التوالي هما : $z_A = 1$; $z_B = -2$.

نربط كل عدد عقدي z مخالف ل -2 بالعدد Z المعروف ب :

$$Z = \frac{z-1}{z+2}$$

(1) حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z في كل من الحالتين التاليتين :

أ- $|Z| = 1$ ب- $Z \in \mathbb{R}$

(2) أ- بين أنه لكل z مخالف ل -2 لدينا :

$$(z+2)(z-1) = -3$$

ب- نعتبر النقطة M ذات اللحق z و النقطة M' التي

لحقاها Z .

بين أن $M' \neq A$ ثم حدد $AM' \times BM'$ و $(\vec{u}, \overline{AM'}) + (\vec{u}, \overline{BM'})$

ج- علما أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها

B و شعاعها 3 بين أن M' تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد

مركزها و شعاعها .

(3) أ- حدد (Γ) مجموعة النقط M ذات اللحق z حيث

$$Z \in i\mathbb{R}$$

ب- لكل عدد حقيقي غير منعدم x نضع $d = \frac{1+2ix}{1-ix}$ و نسمي

D النقطة ذات اللحق d . حدد الشكل الجبري للعدد $\frac{d-1}{d+2}$ ثم

استنتج أن النقطة D تنتمي ل (Γ) .

ج- ليكن θ عنصرا من المجال $]-\pi, \pi]$. نضع

$$f = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{i\theta}$$

و نسمي F النقطة ذات اللحق f .

* بين أن العدد $U = \frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}$ تخيلي صرف .

* بين أن $U = \frac{f-1}{f+2}$. ماذا نستنتج بالنسبة للنقطة F ؟