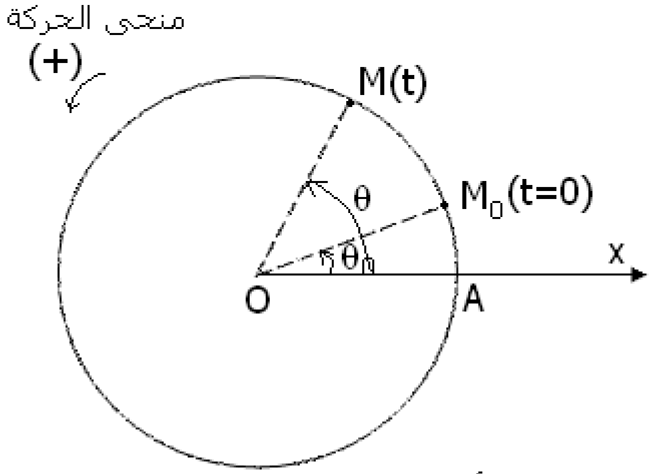
حركة دوران جسم صلب حول محور ثابت

I ـ الأفصول الزاوي ـ السرعة الزاوية (تذكير)

يكون جسم صلب ، غير قابل للتشويه ، في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) إذا كانت جميع نقطه في حركة دائرية ممركزة على هذا المحور باستثناء النقط المنتمية للمحور (Δ) .

نحدد موضع نقطة متحركة من الجسم ، في مرجع أرضي نعتبره غاليليا في لحظة

1 ـ الأفصول الزاوي



الأفصول الزاوي $\theta=(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM})$

الأفصول الزاوي للنقطة المتحركة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت (Δ) هو

الزاوية الموجهة θ بحيث : $\theta=\left(\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{OM}\right)$ بحيث

أن $\overrightarrow{Ox}$ محورا مرجعيا (أصل الأطوار)

والمسار الدائري للنقطة المتحركة موجها في منحى الحركة والذي نعتبره موجبا .

وحدة الأفصول الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي الرديان rad .

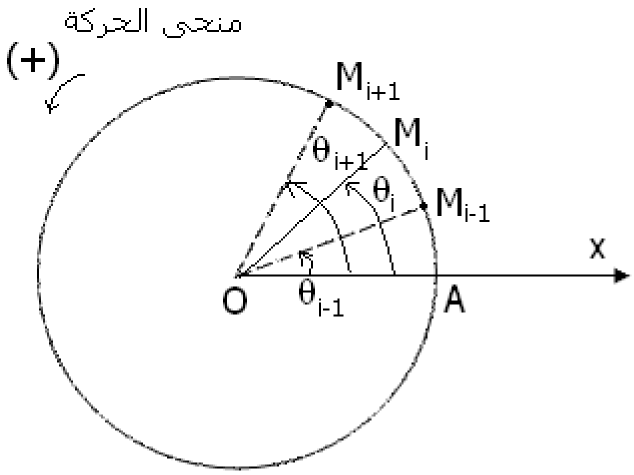
خلال حركة دوران الجسم الصلب حول المحور (Δ) يتغير الأفصول الزاوي مع الزمن t أي أنه دالة زمنية $\theta(t)$.

2 ـ السرعة الزاوية $\dot{\theta}$

نعتبر أنه خلال حركة دوران الجسم الصلب حول المحور (Δ) ، أنه في اللحظة t_i تحتل النقطة M الموضع M_i .

نعتبر لحظتين جد متقاربتين t_{i+1} و t_{i-1} تؤطران اللحظة t_i ، في هذه الحالة تساوي السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_i السرعة المتوسطة للنقطة M بين اللحظتين t_{i+1} و t_{i-1} وهي :

$$\dot{\theta}=\frac{\theta(t_{i+1})-\theta(t_{i-1})}{t_{i+1}-t_{i-1}}$$



$\theta(t_{i+1})$ الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة t_{i+1}

$\theta(t_{i-1})$ الأفصول الزاوي للنقطة M في اللحظة t_{i-1}

نضع $\Delta\theta=\theta(t_{i+1})-\theta(t_{i-1})$ و $\Delta t=t_{i+1}-t_{i-1}$

إذا كانت t_{i+1} و t_{i-1} جد متقاربتين ، فإن Δt تتناهى نحو الصفر وبالتالي ستكون عندنا :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)=\frac{d\theta}{dt}$$

$\frac{d\theta}{dt}$ المشتقة الأولى بالنسبة للزمن للأفصول الزاوي في اللحظة t_1.

وحدة السرعة الزاوية في النظام العالمي للوحدات هي rad/s

يرتبط الأفصول الزاوي والأفصول المنحني $s(t)$ في كل لحظة بالعلاقة التالية : $s(t)=r.\theta(t)$

ومنه نستنتج العلاقة بين السرعة اللحظية للنقطة M $v(t)=\dot{s}(t)$ (السرعة الخطية) والسرعة الزاوية $\dot{\theta}(t)$: $v(t)=r\dot{\theta}(t)$

3 ــ التسارع الزاوي $\ddot{\theta}(t)$

أ ــ تعريف

لتكن $\dot{\theta}(t_i)$ السرعة الزاوية لنقطة M من جسم صلب في حركة دوران حول محور ثابت في لحظة t_i بحيث مؤطرة بلحظتين جد متقاربتين t_{i+1} و t_{i-1} بحيث أن $\dot{\theta}(t_{i+1})$ السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_{i+1} و $\dot{\theta}(t_{i-1})$ السرعة الزاوية للنقطة M في اللحظة t_{i-1}

عندما تتناهى $\Delta t=t_{i+1}-t_{i-1}$ نحو الصفر يتناهى خارج القسمة $\frac{\Delta\dot{\theta}}{\Delta t}=\frac{\dot{\theta}(t_{i+1})-\dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1}-t_{i-1}}$ إلى المشتقة بالنسبة للزمن للسرعة الزاوية أي أن :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dot{\theta}(t_{i+1})-\dot{\theta}(t_{i-1})}{t_{i+1}-t_{i-1}}=\frac{d\dot{\theta}}{dt}=\ddot{\theta}(t_i)$$

وحدة التسارع الزاوي في النظام العالمي للوحدات هي rad/s^2

تمرين تطبيقي :

1 ــ السرعة الزاوية لنقطة متحركة M من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هي $\dot{\theta}=10rad/s$.
أ ــ أحسب التسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ لهذه النقطة .
ب ــ ما طبيعة حركة النقطة M ؟
ج ــ أكتب تعبير الأفصول الزاوي θ بدلالة الزمن t علما أن الأفصول الزاوي عند أصل التواريخ هو $\theta_0=2rad$.
2 ــ تعبير الأفصول الزاوي لنقطة N من جسم صلب في دوران حول محور ثابت هو : $\theta(t)=10t^2+40t+6$ حيث t بالثانية (s) و θ بالرديان (rad)
أ ــ أوجد تعبير السرعة الزاوية بدلالة الزمن .
ب ــ أوجد تعبير التسارع الزاوي بدلالة الزمن .
ج ــ ما طبيعة حركة النقطة N ؟

ب ــ المركبتان a_N و a_T في أساس فريني .

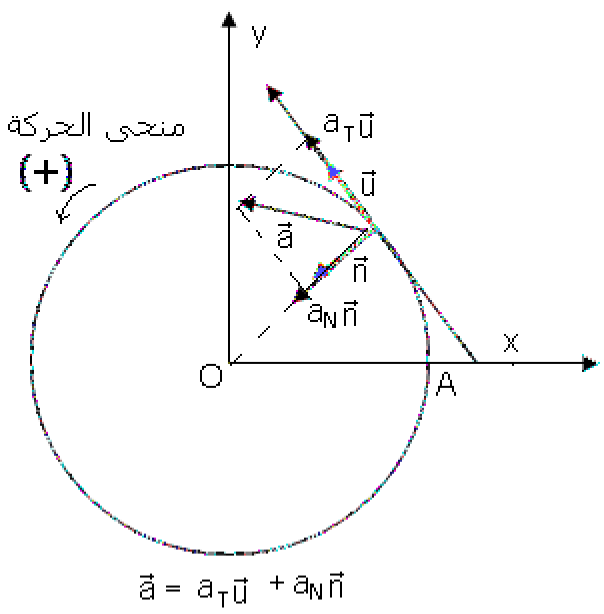
لدينا في أساس فريني : $\vec{a}=a_T.\vec{u}+a_N.\vec{n}$ بحيث أن

$a_T=\frac{dv}{dt}$ و $a_n=\frac{v^2}{\rho}$

s الأفصول المنحني للنقطة M في لحظة t و $v=\frac{ds}{dt}$ السرعة الخطية للنقطة M في اللحظة t و ρ شعاع انحناء المسار في اللحظة t .

حسب تعريف الدوران لجسم صلب حول محور ثابت ، فإن مسار كل نقطة متحركة من الجسم دائريا ممركزا على محور الدوران وبالتالي يكون اتجاه المتجهة الواحدية $\vec{n}$ نحو النقطة O مركز الدائرة ويكون شعاع الانحناء مساويا لشعاع الدائرة r .

نعلم أن $s=r.\theta$ وأيضا $\dot{s}=r\dot{\theta}$ ومنه فإن



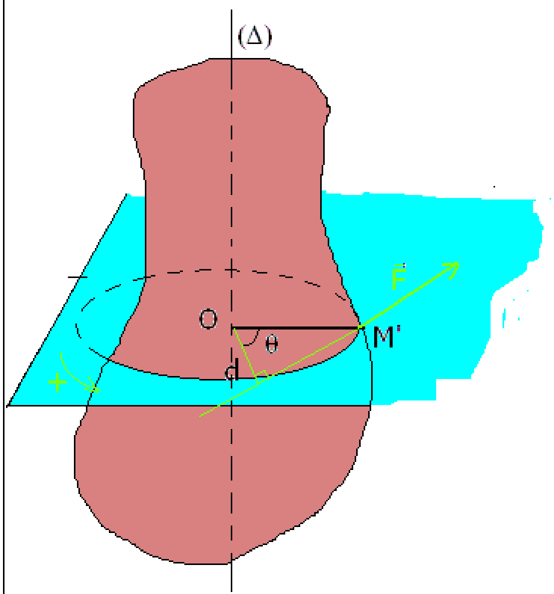
$$a_T = \frac{dv}{dt} = r.\frac{d\theta}{dt} = r.\dot{\theta}$$

ولدينا كذلك $\rho = r$ أي أن
$$a_N = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r\left(\dot{\theta}\right)^2$$

II ـ العلاقة الأساسية للتحريك في حالة دوران جسم حول محور ثابت .

تخص هذه العلاقة كل جسم صلب خاضع لتأثيرات ميكانيكية في دوران حول محور ثابت

1 ـ نص العلاقة



في معلم مرتبط بجسم مرجعي أرضي ، بالنسبة لمحور ثابت (Δ) يساوي مجموع عزوم القوى المطبقة على جسم صلب في دوران حول محور ثابت (Δ) في كل لحظة ، جداء عزم القصور J_Δ والتسارع الزاوي $\ddot{\theta}$ للجسم في اللحظة المعينة :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}_i\right) = J_\Delta.\ddot{\theta}$$

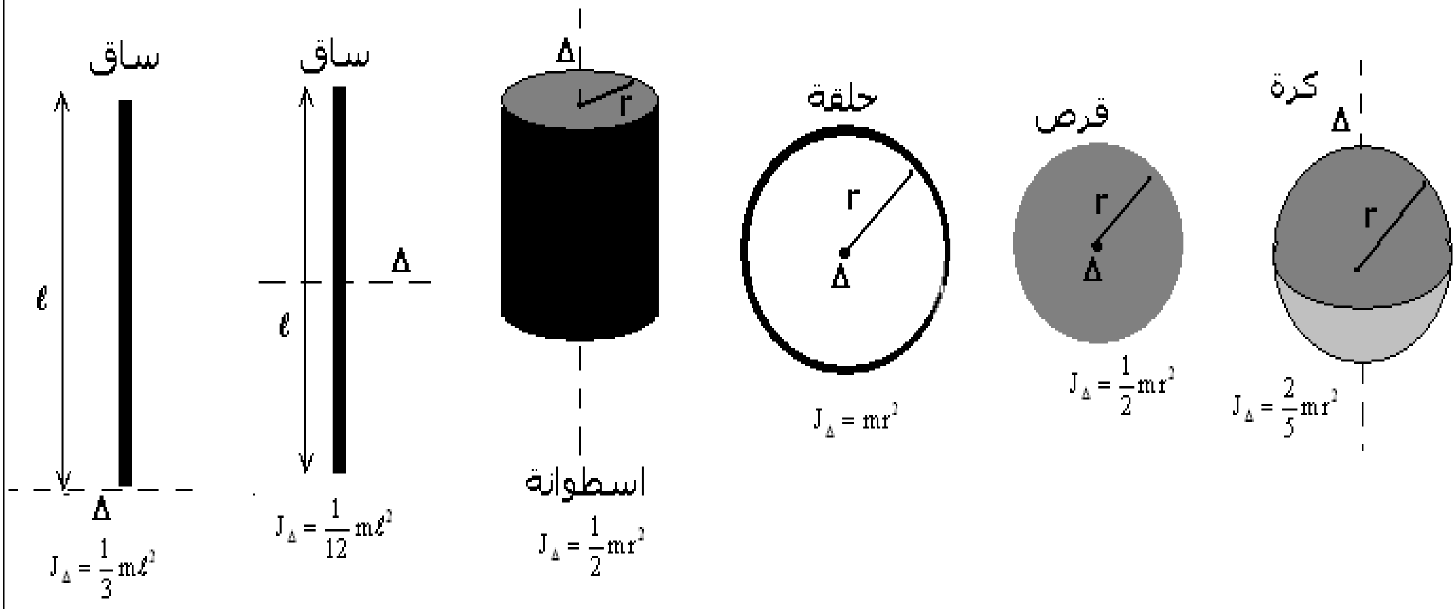
$\sum \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}_i\right)$ مجموع العزوم بالنسبة للمحور Δ للقوى المطبقة على الجسم الصلب $(N.m)$

J_Δ عزم قصور الجسم الصلب بالنسبة للمحور (Δ) نعبر عنه ب $kg.m^2$

$\ddot{\theta}$ التسارع الزاوي نعبر عنه ب rad/s^2

2 ـ تعابير عزم القصور لأجسام متجانسة ذات أشكال هندسية بسيطة .

عزم قصور J_Δ لجسم صلب يميز حركة دوران الجسم حول المحور (Δ)



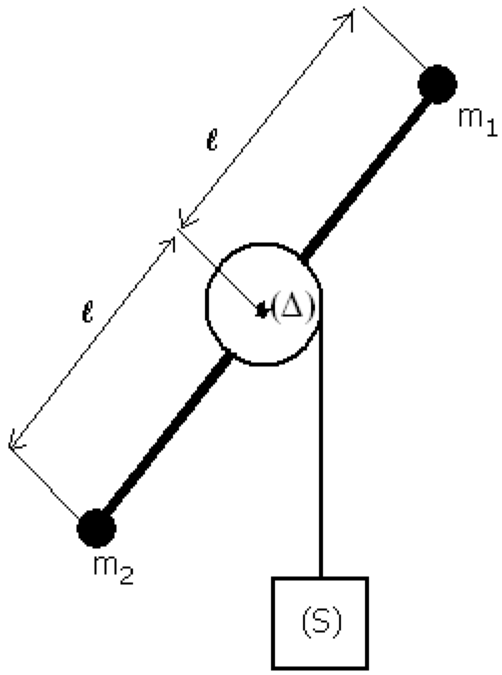
حالتان خاصتان :

إذا كان التسارع الزاوي منعدما $\ddot{\theta} = 0$ فإن حركة الجسم الصلب حول المحور Δ حركة دورانية منتظمة .

إذا كان التسارع الزاوي ثابتا تكون حركة الجسم الصلب حول المحور Δ حركة دورانية متغيرة بانتظام .

III ـ تطبيق : حركة مجموعة ميكانيكية في حالة إزاحة ودوران حول محور ثابت .

نعتبر أسطوانة متجانسة شعاعها $r=10cm$ **وكتلتها** $m=1kg$ **يمكنها الدوران حول محور ثابت** (Δ) **حيث يمر بمركزها ساق T ثبت في طرفيه جسمين نقطيين كتلتهما** $m_1=m_2=0,5kg$ **، يوجد مركز قصورهما على نفس المسافة** $\ell=50cm$ **من المحور** (Δ) **. تحمل الأسطوانة جسما (S) كتلته** $m'=10kg$ **، بواسطة حبل ملفوف حولها نعتبره غير قابل الامتداد وكتلته مهملة.**



نترك المجموعة بدون سرعة بدئية ، علما أن الاحتكاكات مهملة وكذلك كتلة الساق .

1 ـ أوجد التسارع a للجسم (S) وتوتر الحبل أثناء الحركة

2 ـ عين السرعة الزاوية للأسطوانة عندما يقطع الجسم مسافة $h=5m$ **. نعطي** $g=10m/s^2$

تمرين 3

ندير قرصا متجانسا ، كتلته $m=10kg$ وشعاعه $r=10cm$ ، حول محوره إلى أن تصير سرعة دورانه 400 دورة في الدقيقة ، تم نتركه

نلاحظ أن القرص يتوقف عن الدوران بعد ثلاث دقائق تحت تأثير الاحتكاك الذي نقرن به مزدوجة ، نعتبر عزمها ثابتا .

1 ـ أحسب التسارع الزاوي للقرص .

2 ـ استنتج عزم المزدوجة ال

الجواب :

1 ـ نقوم بدراسة حركة القرص انطلاقا من حصوله على السرعة الزاوية $\omega_0=\frac{2\pi\times 400}{60}=41,8rad/s$

إلى أن يتوقف أي أن سرعته الزاوية منعدمة . حركة القرص في هذه المرحلة حركة دائرية متغيرة بانتظام ، يمكن أن نبين ذلك بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك :

$$\sum \mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}\right)=J_\Delta.\ddot{\theta}\Rightarrow \mathcal{M}_C=J_\Delta.\ddot{\theta}\Rightarrow \ddot{\theta}=\frac{\mathcal{M}_C}{J_\Delta}=cte$$

أي أن المعادلة الزمنية لهذه الحركة هي : $\theta(t)=\frac{1}{2}\ddot{\theta}t^2+\omega_0 t$ ومعادلة السرعة كذلك هي :

$$\dot{\theta}(t)=\ddot{\theta}t+\omega_0$$

عند انعدام السرعة الزاوية لدينا : $\ddot{\theta}t+\omega_0=0\Rightarrow\ddot{\theta}=-\frac{\omega_0}{t}$

تطبيق عددي : $\ddot{\theta}=-\frac{\omega_0}{t}=-\frac{41,8}{3\times 60}=-0,23rad/s^2$

2 ـ حساب عزم المزدوجة المقاومة :

$\mathcal{M}_C=J_\Delta.\ddot{\theta}$ بحيث أن $J_\Delta=\frac{1}{2}mr^2=0,05kg.m^2$ وبالتالي فإن $\mathcal{M}_C=-0,0115N.m$

حساب عدد الدورات المنجزة قبل لأن يتوقف :

$\theta=-0,23t^2+41,8t$ لدينا $\theta=-0,23(180)^2+41,8(180)=72rad$

ونعلم أن $\theta=2\pi n\Rightarrow n=\frac{\theta}{2\pi}=11,5$