

# أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2011

## التمرين الأول :

نحل في  $\mathbb{R}$  المعادلة :  $x^2 - 2x - 3 = 0$

لدينا :  $\Delta = (-2)^2 - 4(-3) = 16$

إذن : المعادلة تقبل حلين حقيقيين  $x_1$  و  $x_2$  :

$$x_1 = \frac{2 - \sqrt{16}}{2} = -1 \quad \text{و} \quad x_2 = \frac{2 + \sqrt{16}}{2} = 3$$

نحل في  $\mathbb{R}$  المعادلة :  $e^x - \frac{3}{e^x} - 2 = 0$

بعد توحيد المقام نحصل على :  $\frac{e^{2x} - 3 - 2e^x}{e^x} = 0$

يعني :  $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0$

نضع :  $t = e^x$  . إذن المعادلة تُصبح :  $t^2 - 2t - 3 = 0$

و نعلم حسب السؤال (1) أن : حلّي هذه المعادلة هما  $-1$  و  $3$  .

إذن :  $t = 3$  أو  $t = -1$

يعني :  $e^x = 3$  أو  $e^x = -1$

نعلم أن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

إذن المعادلة  $e^x = -1$  لا تقبل حولا في  $\mathbb{R}$  . و بالتالي :  $e^x = 3$

يعني :  $\ln(e^x) = \ln 3$  أي :  $x = \ln 3$

و بالتالي : المعادلة تقبل حلا وحيدا في  $\mathbb{R}$  و هو العدد الحقيقي  $\ln 3$  .

نحل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة :  $e^{x+1} - e^{-x} \geq 0$

بعد تعميل الطرف الأيسر نحصل على :  $e^{-x}(e^{2x+1} - 1) \geq 0$

نلاحظ أن إشارة الطرف الأيسر تتعلق فقط بإشارة  $(e^{2x+1} - 1)$

و ذلك لأن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^{-x} > 0$

نحل أولا المعادلة  $e^{2x+1} - 1 = 0$  . التي تعني :  $e^{2x+1} = 1$

إذن :  $2x + 1 = \ln 1$  أي  $2x + 1 = 0$  أي  $x = \frac{-1}{2}$

و بذلك نستنتج جدول الإشارة التالي :

| $x$                    | $-\infty$ | $\frac{-1}{2}$ | $+\infty$ |
|------------------------|-----------|----------------|-----------|
| $e^{-x}$               | +         | +              | +         |
| $e^{2x+1} - 1$         | -         | 0              | +         |
| $e^{-x}(e^{2x+1} - 1)$ | -         | 0              | +         |

من خلال الجدول :  $e^{-x}(e^{2x+1} - 1) \geq 0$  ;  $\forall x \in \left[ \frac{-1}{2}; +\infty \right[$

إذن ( $S$ ) مجموعة حلول المتراجحة هي :  $S = \left[ \frac{-1}{2}; +\infty \right[$

## التمرين الثاني :

1

نحل في مجموعة الأعداد العقدية  $\mathbb{C}$  المعادلة :  $z^2 - 6z + 18 = 0$

لدينا :  $\Delta = (-6)^2 - 4(18) = -36 = (6i)^2$

إذن المعادلة تقبل حلين عقديين  $z_1$  و  $z_2$  معرفين بما يلي :

$$z_1 = \frac{6 - 6i}{2} = 3(1 - i) \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{6 + 6i}{2} = 3(1 + i)$$

2

$$a = 3 + 3i = 3(1 + i) \quad b = 3 - 3i = 3(1 - i)$$

$$= 3\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$= 3\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} \left( \cos \frac{-\pi}{4} - i \sin \frac{-\pi}{4} \right)$$

$$= 3\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

2

$$\begin{cases} aff(A) = a = 3 + 3i = 3\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \\ aff(B) = b = 3 - 3i = 3\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \\ aff(B') = b' \end{cases} \quad \text{لدينا :}$$

و لدينا كذلك الإزاحة  $t$  معرفة بما يلي :

$$M \rightarrow M' = t_{\overrightarrow{OA}}(M)$$

$$t_{\overrightarrow{OA}}(B) = B'$$

إذن : حسب التعريف المتجهي للإزاحة نكتب :  $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{OA}$

و باستعمال التعبيرات العقدية نكتب :

$$aff(B') - aff(B) = aff(A) - aff(O)$$

$$b' - 3 + 3i = 3 + 3i \quad \text{يعني : } b' - b = a$$

$$aff(B') = 6 \quad \text{و بالتالي : } b' = 3 + 3i + 3 - 3i = 6$$

2

$$\frac{b - b'}{a - b'} = \frac{3 - 3i - 6}{3 + 3i - 6} = \frac{-3(i + 1)}{-3(1 - i)} = \frac{i + 1}{1 - i} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{(i + 1)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{2i}{1^2 - i^2} = \frac{2i}{1 - (-1)} = \frac{2i}{2} = i$$

$$\frac{b - b'}{a - b'} = i \quad \text{و بالتالي :}$$

$$\left| \frac{b - b'}{a - b'} \right| = 1$$

$$\arg \left( \frac{b - b'}{a - b'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\begin{cases} |b - b'| = |a - b'| \\ \arg \left( \frac{b - b'}{a - b'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{B'A} \\ \arg \left( \frac{b - b'}{a - b'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{يعني :}$$

و من هاتين النتيجةين نستنتج أن المثلث  $ABB'$  متساوي الساقين رأسه  $B'$  و كذلك قائم الزاوية في نفس النقطة  $B'$  .



1

أ



و بالتالي  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_{n+1} = \frac{1}{6} v_n$

إذن  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{6}$ .

ومنه فإن الحد العام للمتتالية  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  يُكتب على الشكل التالي :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = v_0 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-0}$$

$$\text{لدينا : } v_0 = 1 - \frac{1}{3u_0} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

● (3) ●

لدينا حسب السؤال (2) :  $(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; v_n = 1 - \frac{1}{3u_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - \frac{1}{3u_n} = \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^n = \frac{1}{3u_n}$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n = \frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$$

نلاحظ أن  $\left(\frac{1}{6}\right)^n$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{6}$  و هو عدد حقيقي أصغر من 1 .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3 - 2\left(\frac{1}{6}\right)^n}\right) = \frac{1}{3 - 2 \times 0} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \frac{1}{3}$$

### التمرين الرابع :

● (1) ●

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I = ]0; +\infty[$  .

$$\text{لدينا : } g(x) = x - 1 + \ln x$$

$$\text{إذن : } g'(x) = 1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in I) ; g'(x) = \frac{x+1}{x}$$

● (1) ●

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$  . إذن :  $x > 0$

$$\text{ومنه : } x + 1 > 1 > 0$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in I) ; \frac{x+1}{x} > 0$$

$$\text{يعني : } (\forall x \in I) ; g'(x) > 0$$

أي أن الدالة  $g$  تزايدية قطعاً على المجال  $I$  .

● (2) ●

$$OA = |z_A - z_0| = |a| = \left|3\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right| = 3\sqrt{2}$$

$$\text{لدينا : } AB' = |z_{B'} - z_A| = |6 - 3 - 3i| = |3 - 3i| = 3\sqrt{2}$$

$$B'B = |z_B - z_{B'}| = |3 - 3i - 6| = 3\sqrt{2}$$

$$BO = |z_0 - z_B| = |-3 + 3i| = 3\sqrt{2}$$

نستنتج إذن أن :  $OA = AB' = B'B = BO$  .  
ومنه فإن الرباعي  $OAB'B$  معين لأن جميع أضلاعه متقايسة .  
وبما أن الزاوية  $\widehat{B}$  زاوية قائمة حسب نتيجة السؤال ج) .  
فإن الرباعي  $OAB'B$  مربع لأنه معين وإحدى زواياه قائمة .

### التمرين الثالث :

● (1) ●

$$\text{ليكن } n \text{ عنصرا من } \mathbb{N} . \text{ لدينا : } u_{n+1} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n}$$

$$\text{إذن : } u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{6u_n}{1 + 15u_n} - \frac{1}{3}$$

$$\text{يعني : } u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{18u_n - (1 + 15u_n)}{3(1 + 15u_n)}$$

$$\text{يعني : } u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{3u_n - 1}{3(1 + 15u_n)}$$

$$\text{إذن : } (*) \quad u_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{1 + 15u_n}$$

● (1) ●

لنبرهن على صحة العبارة  $(P_n)$  التالية :  $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$  .  
لدينا :  $u_0 = 1 > \frac{1}{3}$  . إذن العبارة  $(P_0)$  صحيحة .

$$\text{نفترض أن : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$$

$$\text{إذن : } (u_n - \frac{1}{3}) > 0 \text{ و } (15u_n + 1) > 6 > 0$$

ومنه فإن الكمية  $\frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1}$  موجبة قطعاً لأنها خارج كميتين موجبتين قطعاً

$$\text{يعني : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{u_n - \frac{1}{3}}{15u_n + 1} > 0$$

$$\text{ومنه حسب النتيجة (*) : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} - \frac{1}{3} > 0$$

$$\text{أي : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} > \frac{1}{3}$$

و هذا يعني أن العبارة  $(P_{n+1})$  صحيحة .

$$\text{و بالتالي حسب مبدأ التراجع : } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > \frac{1}{3}$$

● (2) ●

ليكن  $n$  عنصرا من المجموعة  $\mathbb{N}$  . لدينا :

$$v_{n+1} = 1 - \frac{1}{3u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{1 + 15u_n}{6u_n}\right) = 1 - \frac{1 + 15u_n}{18u_n}$$

$$= \frac{18 - (1 + 15u_n)}{18u_n} = \frac{3u_n - 1}{18u_n} = \frac{u_n - \frac{1}{3}}{6u_n}$$

$$= \frac{1}{6} \left(\frac{u_n - \frac{1}{3}}{u_n}\right) = \frac{1}{6} v_n$$



2 II ب

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $[1; +\infty[$ .

إذن حسب نتيجة السؤال (I) :  $g(x) \geq 0$

يعني :  $\frac{g(x)}{x^2} \geq 0$  ( لأن :  $x > 0$  )

ومنه :  $\forall x \in [1; +\infty[ ; f'(x) \geq 0$

يعني أن الدالة تزايدية على المجال  $[1; +\infty[$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; 1]$ .

إذن حسب نتيجة السؤال (I) :  $g(x) \leq 0$

يعني :  $\frac{g(x)}{x^2} \leq 0$  ( لأن :  $x > 0$  )

ومنه :  $\forall x \in ]0; 1] ; f'(x) \leq 0$

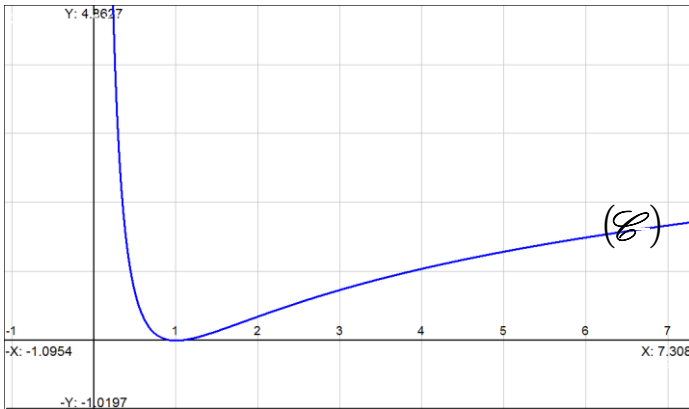
يعني أن الدالة  $f$  تناقصية على المجال  $]0; 1]$



2 II ج

|         |           |   |           |
|---------|-----------|---|-----------|
| $x$     | 0         | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | -         | 0 | +         |
| $f$     | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ |

3 II



4 II أ

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . لدينا :  $H(x) = \frac{(\ln x)^2}{2}$

إذن :  $H'(x) = \frac{2(\ln x) \cdot \frac{1}{x}}{2} = \frac{\ln x}{x} = h(x)$

إذن الدالة  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على المجال  $I$ .

4 II ب

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

2 I

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $[1; +\infty[$ . إذن :  $x \geq 1$   
ومنه :  $g(x) \geq g(1)$  لأن  $g$  دالة تزايدية قطاعا على  $I$

ولدينا :  $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$

إذن :  $\forall x \in [1; +\infty[ ; g(x) \geq 0$

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $]0; 1]$ . إذن :  $x \leq 1$

ومنه :  $g(x) \leq g(1)$  لأن  $g$  دالة تزايدية على  $I$ .

ولدينا :  $g(1) = 0$

إذن :  $\forall x \in ]0; 1] ; g(x) \leq 0$

1 II أ

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . لدينا :  $f(x) = \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \ln x = \left( 1 - \frac{1}{0^+} \right) (-\infty)$$

$$= (1 - \infty)(-\infty) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  وتأويلها الهندسي هو أن المستقيم ذو المعادلة  $x = 0$  (محور الأرتايب) مقارب عمودي للمنحنى  $(E)$  بجوار الصفر على اليمين.

1 II ب

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \ln x$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{+\infty} \right) (+\infty) = (1 - 0)(+\infty) = +\infty$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{x} \right) \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{x} \right) \frac{\ln x}{x}$$

$$= \left( 1 - \frac{1}{+\infty} \right) (0) = (1 - 0)(0) = 0$$

إذن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  (2)

1 II ج

من النهايتين (1) و (2) نستنتج أن المنحنى  $(E)$  يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل بجوار  $+\infty$ .

2 II أ

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . لدينا :  $f(x) = \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x$

إذن :  $f'(x) = \left( \frac{x-1}{x} \right) \ln x + (\ln x)' \left( \frac{x-1}{x} \right)$

$$= \left( \frac{x - (x-1)}{x^2} \right) \ln x + \frac{1}{x} \left( \frac{x-1}{x} \right)$$

$$= \frac{\ln x + x - 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

إذن :  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$  ( $\forall x \in \mathbb{R}$ )



## 4 II

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x \, dx &= \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \cdot \underbrace{\ln x}_v \, dx = [uv]_1^e - \int_1^e uv' \, dx \\ &= [x \ln x]_1^e - \int_1^e \left(x \cdot \frac{1}{x}\right) dx = [x \ln x]_1^e - \int_1^e 1 \, dx \\ &= [x \ln x]_1^e - [x]_1^e = [x \ln x - x]_1^e \\ &= (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = 0 - (-1) = 1\end{aligned}$$

## 5 II

ليكن  $x$  عنصرا من المجال  $I$ . لدينا :

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right) \ln x = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

إذن :  $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x}$

## 5 II

لتكن  $\mathcal{A}$  مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى  $(\mathcal{C})$  و محور الأفصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = 1$  و  $x = e$ . نعلم أن التكامل يقيس دائما طول أو مساحة أو حجم .

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)| \, dx \quad \text{إذن :}$$

نلاحظ حسب جدول تغيرات الدالة  $f$  أن 0 قيمة دنوية للدالة  $f$  على  $I$ .  
يعني :  $(\forall x \in I) ; f(x) \geq 0$   
و منه :  $(\forall x \in I) ; |f(x)| = f(x)$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \int_1^e |f(x)| \, dx = \int_1^e f(x) \, dx = \int_1^e \left(\ln x - \frac{\ln x}{x}\right) dx \quad \text{إذن :} \\ &= \int_1^e \ln x \, dx - \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx \\ &= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\text{unité})^2 \\ &= \frac{1}{2} (1 \text{ cm})^2 = 0,5 \text{ cm}^2\end{aligned}$$

