متتاليات عددية

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 3} \end{cases}$

1] احسب u_1 و u_2 و u_3 .

2] نضع $v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$ $\forall n \in IN$

بين أن المتتالية $(v_n)_{n\geq 0}$ حسابية محددا أساسها

3] احسب v_n بدلالة n .

4] استنتج u_n بدلالة n .

5] احسب بدلالة n المجموع

$S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$.

التمرين الثاني

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة ب: $\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \dfrac{4}{4 - U_n} \end{cases}$

1) بين أن $U_n > 1$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) نضع $V_n = \dfrac{1}{U_n - 1}$ لكل n من $\mathbb{N}$

4) أ) بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية و أحسب V_n بدلالة n

ب) حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

التمرين الثالث

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية معرفة ب: $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = 5 - \dfrac{4}{U_n} \end{cases}$

1) بين أن $2 \leq U_n < 4$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

2) أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$

3) نضع $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - 4}$ لكل n من $\mathbb{N}$

4) أ) بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية و أحسب V_n بدلالة n

ب) حدد الحد العام U_n بدلالة n و أحسب النهاية $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

5) أ- بين أن $4 - U_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(4 - U_n)$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ب- استنتج أن $0 \leq 4 - U_n \leq 2\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$

ج- أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$u_0 = 2$ و $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\sqrt{u_n^2 + 9}$ لكل n من $\mathbb{N}$

1- أ- بين بالترجع أن : $u_n > \sqrt{3}$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب- بين أن المتتالية (u_n) تناقصية قطعا .

ج- استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .

2- نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة بما يلي :

$v_n = u_n^2 - 3$ لكل n من $\mathbb{N}$.

أ- أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية محددا أساسها

ب- احسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- احسب نهاية المتتالية (u_n)

التمرين الخامس

1 - لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I = [\,0\,,1\,]$

بما يلي : $f(x) = \dfrac{x-8}{2x-9}$.

بين f تزايدية على المجال I و أن بين أن : $f(I) \subset I$

2 - نعتبر المتتالية العددية (U_n) المعرفة بما يلي :

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 8}{2U_n - 9} \end{cases}$; $n \in IN$

أ - بين أن : $0 \leq U_n \leq 1$; $(\forall n \in IN)$.

ب - بين أن (U_n) تزايدية و استنتج أنها متقاربة .

ج - احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

التمرين السادس

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية حيث : $U_0 = 1$ و $U_{n+1} = U_n + U_n^2$

1) بين أن $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية تزايدية

2) بين أن $U_n^2 \geq U_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$

و استنتج أن $U_{n+1} \geq 2U_n$: $\forall n \in \mathbb{N}$

3) بين أن $U_n \geq 2^n$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

التمرين السابع

$(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية عددية بحيث :

$$U_{n+1}=U_n^2+\frac{1}{2}U_n \text{ و } U_0=\frac{1}{4}$$

1) أ- أحسب U_1 , U_2

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad 0<U_n\leq\frac{1}{4}$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة

3) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_{n+1}\leq\frac{3}{4}U_n$

ب- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad U_n\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

ثم حدد نهاية المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

التمرين الثامن

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $U_0=3$ و

$U_{n+1}=f(U_n)$ حيث أن $f(x)=\frac{6x-1}{x+2}$

1) بين أن الدالة f تزايدية على المجال $I=[2,4]$

2) أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad : \quad 2<U_n<4$

ب- أحسب U_1 و بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

3) استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين التاسع

نعتبر الدالة العددية f بحيث : $f(x)=\frac{x^2+2}{x-2}$

1) أ- بين أن $f'(x)=\frac{(x-2)^2-6}{(x-2)^2}$

ب- استنتج أن f تزايدية على المجال $I=[-2,-1]$

و أن $f(I)\subseteq I$

2) $(U_n)_n$ متتالية معرفة ب: $U_0=-2$ و $U_{n+1}=f(U_n)$

أ- بين أن $(\forall n\in\mathbb{N})\quad -2\leq U_n\leq -1$

ب- بين أن $(U_n)_n$ متتالية تزايدية

ج- استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

التمرين العاشر

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq0}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_0=\frac{1}{2} \\ u_{n+1}=\frac{2u_n}{1+u_n^2} \quad , n\in IN \end{cases}$$

1 [احسب u_1 و u_2 .

2 [أ – أثبت أن $\forall n\in IN \quad 0\langle u_n\langle 1$.

ب – بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ تزايدية ثم استنتج أن

$\forall n\in IN \quad u_n\geq\frac{1}{2}$.

3 [أ – بين أن $\forall n\in IN \quad 1-u_{n+1}\leq\frac{2}{5}(1-u_n)$.

ب – استنتج أن $\forall n\in IN \quad 1-u_{n+1}\leq\left(\frac{2}{5}\right)^n(1-u_0)$.

4 [بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq0}$ متقاربة و حدد نهايتها .

التمرين الحادي عشر

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} U_{n+1}=U_n\sqrt[3]{4-U_n} \\ U_0=1 \end{cases}$

و نضع $f(x)=x\sqrt[3]{4-x}$

1) أ- أدرس اتصال الدالة f على $[0,4]$

ب- بين أن f تزايدية على المجال $[1,3]$ و استنتج أن $f([1,3])\subseteq[1,3]$

2) أ- بين أن $1\leq U_n\leq 3 \quad (\forall n\in\mathbb{N})$

ب- أدرس رتابة المتتالية $(U_n)_n$ و استنتج أنها متقاربة

أ- حدد نهاية المتتالية $(U_n)_n$