

تصحيح التمرين 1

1. لدينا : $\vec{OA}(1,2,1)$ و $\vec{OB}(1,3,1)$

$$\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} \vec{k} = -\vec{i} + \vec{k} \quad \text{لدينا :}$$

2. لدينا $\vec{OA} \wedge \vec{OB}(-1,0,1)$ متجهة منظمية للمستوى (OAB)

إذن معادلة ديكرتية للمستوى (OAB) تكتب على شكل : $(-1)x + (0)y + (1)z + d = 0$

و لدينا : $O(0,0,0) \in (OAB)$: إذن $(-1)(0) + (0)(0) + (1)(0) + d = 0$ أي $d = 0$

إذن المعادلة تصبح : $-x + z = 0$

و منه : $x - z = 0$ معادلة ديكرتية للمستوى (OAB)

3. بما أن : الفلكة (S) مماسة للمستوى (OAB) فإن شعاع (S) هو :

$$d(\Omega, (OAB)) = \frac{|(-3) - (1)|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

ولدينا $\Omega(-3,0,1)$ هو مركز الفلكة (S)

إذن معادلة الفلكة (S) : $(x+3)^2 + y^2 + (z-1)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$

4. نقطة التماس هي نقطة تقاطع المستوى (OAB) مع المستقيم (Δ) العمودي على (OAB) و المار من $\Omega(-3,0,1)$.

لدينا $\vec{OA} \wedge \vec{OB}(-1,0,1)$ موجهة للمستقيم (Δ)

لأن $(\Delta) \perp (OAB)$ و $\vec{OA} \wedge \vec{OB}$ متجهة للمستوى (OAB)

$$\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \end{cases} \quad \text{إذن تمثيل بارامترى للمستقيم } (\Delta) \text{ هو : } (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = -1 \\ t = -2 \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x = -3 - t \\ y = 0 \\ z = 1 + t \\ x - z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{و منه مثلوث إحداثيات نقطة التماس هو حل للنظمة :}$$

و بالتالي مثلوث إحداثيات نقطة التماس هو : $(-1,0,-1)$

5. لدينا : $H(-1,0,-1) \in (S)$ ، بما أن $\vec{\Omega H}(2,0,-2)$ فإن $\vec{\Omega H} \wedge \vec{u} = 10\vec{i} - 8\vec{j} + 10\vec{k}$

و لدينا : $d(\Omega, (D)) = \frac{\|\overrightarrow{\Omega H} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{264}}{\sqrt{33}} = 2\sqrt{2}$ ، حيث (D) هو المستقيم المار من H و الموجه بالمتجهة

$$\vec{u}(2,5,2)$$

و بما أن $2\sqrt{2}$ شعاع الفلكة (S) فإن (D) مماس للفلكة (S) .

تصحيح التمرين 2

1. أ) لدينا $\overrightarrow{AB}(0,4,-2)$ و $\overrightarrow{BC}(-1,-2,2)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} + 2\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$d(A, (BC)) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{BC}\|}{\|\overrightarrow{BC}\|} = \frac{\sqrt{4^2 + 2^2 + 4^2}}{\sqrt{(-1)^2 + (-2)^2 + (2)^2}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} = 2 \quad \text{ب)}$$

2. H هي نقطة تقاطع المستوى (P) المار من A و العمودي على (BC) مع المستقيم (BC)

$$\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-2t \\ z = 1+2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) : (BC) \text{ تمثيل بارامترى للمستقيم}$$

لدينا $\overrightarrow{BC}(-1,-2,2)$ منظمية للمستوى (P) إذن معادلة ديكرتية للمستوى (P) تكتب على شكل :

$$-x - 2y + 2z + d = 0$$

و لدينا : $A(2,-1,1) \in (P)$ إذن : $-(2) - 2(-1) + 2(1) + d = 0$ إذن : $d = -2$

$$\text{أي : } (P) : -x - 2y + 2z - 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{5}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ أي : } \begin{cases} x = 1-t \\ y = 1-2t \\ z = 1+2t \\ -x - 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

و منه مثلوث إحداثيات نقطة التماس هو حل للنظمة :

و بالتالي : $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ هو مثلوث إحداثيات H

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{HM} = 0 \quad .3$$

لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-2, y+1, z-1)$ و $\overrightarrow{HM}\left(x-\frac{2}{3}, y-\frac{1}{3}, z-\frac{5}{3}\right)$

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow (x-2)\left(x-\frac{2}{3}\right) + (y+1)\left(y-\frac{1}{3}\right) + (z-1)\left(z-\frac{5}{3}\right) = 0$$

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - \frac{8}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{8}{3}z + \frac{8}{3} = 0$$

تصحيح التمرين 3

.1

$$M(x, y, z) \in (S) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4y + 2z + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 2z + 1 = 4 + 1 - 2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3$$

$$\Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-2)^2 + (z-(-1))^2 = (\sqrt{3})^2$$

إذن (S) هي الفلكة التي مركزها $\Omega(0, 2, -1)$ و شعاعها $R = \sqrt{3}$

.2 (أ) لدينا : $(-1)^2 + ((1)-2)^2 + ((0)+1)^2 = 1+1+1 = 3 = (\sqrt{3})^2$

إذن : $A(-1, 1, 0) \in (S)$

(ب) (P) مماس ل (S) عند النقطة A

لدينا A هي المسقط العمودي ل Ω على (P)

إذن $\overrightarrow{A\Omega}(1, 1, -1)$ منظمية للمستوى (P)

إذن معادلة للمستوى (P) تكتب على شكل : $(1)x + (1)y + (-1)z + d = 0$

و لدينا $A(-1, 1, 0) \in (P)$ إذن : $(1)(-1) + (1)(1) + (-1)(0) + d = 0$ أي : $d = 0$

و منه معادلة للمستوى (P) تكتب على شكل : $x + y - z = 0$

.3 (أ) لدينا : $\vec{n}(1, 1, 1)$ متجهة منظمية للمستوى (Q) و $B(1, 3, -2) \in (Q)$

$$M(x, y, z) \in (Q) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} = 0$$

لدينا : $\overrightarrow{BM}(x-1, y-3, z+2)$

$$M(x, y, z) \in (Q) \Leftrightarrow (1)(x-1) + (1)(y-3) + (1)(z+2) = 0$$

و منه : $(Q): x + y + z - 2 = 0$

$$d(\Omega, (Q)) = \frac{|(0) + (2) + (-1) - 2|}{\sqrt{(1)^2 + (1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{ب) لدينا :}$$

بما أن $d(\Omega, (Q)) < R$ فإن (Q) يقطع (S) وفق دائرة شعاعها :

$$r = \sqrt{R^2 - (d(\Omega, (Q)))^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$$

مركز الدائرة H هو نقطة تقاطع المستقيم (Δ) المار من Ω و العمودي على (Q) مع المستوى (Q)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{7}{3} \\ z = \frac{-2}{3} \\ t = \frac{1}{3} \end{array} \right. \quad \text{أي} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 2+t \\ z = -1+t \\ x + y + z - 2 = 0 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{مثلوث إحداثيات } H \text{ هو حل للنظمة}$$

$$\text{ومنه } H \left(\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{-2}{3} \right)$$

تصحيح التمرين 4

1. أ) لدينا $\overrightarrow{OA}(1, -1, 3)$ متجهة موجهة للمستقيم (OA)

$$M(x, y, z) \in (OA) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = t \cdot \overrightarrow{OA} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = -t \\ z = 3t \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب) لدينا $\overrightarrow{OA}(1, -1, 3)$ منظمية للمستوى (Q)

إذن معادلة ديكرتية للمستوى (Q) نكتب على شكل : $x - y + 3z + d = 0$

و لدينا : $A(1, -1, 3) \in (Q)$ إذن : $(1) - (-1) + 3(3) + d = 0$ أي $d = -11$

و منه معادلة ديكرتية للمستوى (Q) : $x - y + 3z - 11 = 0$

ج) $\vec{n}(1, -1, 3)$ متجهة منظمية للمستوى (P) و $\vec{n}'(1, -1, 3)$ متجهة منظمية للمستوى (Q)

بما أن \vec{n} و \vec{n}' مستقيمتان فإن $(P) \parallel (Q)$

2. أ) بما أن (Q) مماس للفلكة (S) في النقطة A فإن A هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (Q) و منه :

$$\boxed{(\Omega A) \perp (Q)}$$

و بما أن (P) يقطع (S) وفق دائرة (Γ) مركزها O فإن O هي المسقط العمودي للنقطة Ω على (P) و منه :

$$(\Omega O) \perp (P)$$

و بما أن $(P) \parallel (Q)$ فإن

$$\boxed{(\Omega O) \perp (Q)}$$

إذن النقط Ω و A و O مستقيمية . و بالتالي $\Omega \in (OA)$.

$$\begin{cases} a = t \\ b = -t \\ c = 3t \end{cases}$$

بما أن $\Omega(a, b, c) \in (OA)$ فإن المثلوث (a, b, c) يحقق التمثيل البارامتري للمستقيم (OA) أي :

$$c = 3a \text{ و } b = -a \text{ و منه :}$$

ب) لدينا : $R^2 = (d(\Omega, (P)))^2 + r^2$ حيث R هو شعاع الفلكة (S) و r هو شعاع الدائرة (Γ)

و بما أن المستوى (Q) مماس للفلكة (S) في النقطة A فإن $R = \Omega A$

و لدينا كذلك $d(\Omega, (P)) = \Omega O$ و $r = \sqrt{33}$

إذن : $\Omega A^2 = \Omega O^2 + \sqrt{33}^2$ و منه :

$$\boxed{\Omega A^2 - \Omega O^2 = 33}$$

لدينا : $\Omega O^2 = a^2 + b^2 + c^2$ و $\Omega A^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2a + 2b - 6c + 11$ بالتعويض في النتيجة المحصل عليها نجد :

$$\boxed{a - b + 3c = -11}$$

ج) المثلوث (a, b, c) يحقق $b = -a$ و $c = 3a$ و $a - b + 3c = -11$

إذن : $a - (-a) + 3(3a) = -11$ أي : $a = -1$ و منه $b = 1$ و $c = -3$ و بالتالي : $\Omega(-1, 1, -3)$

و لدينا كذلك : $R = \Omega A = \sqrt{44} = 2\sqrt{11}$

تصحيح التمرين 5

1. لدينا : $\vec{n}(1, 1, -1)$ متجهة منظمية للمستوى (P) و $(D) \perp (P)$ إذن $\vec{n}(1, 1, -1)$ موجهة للمستقيم (D)

و لدينا : $A(2, 0, 2) \in (D)$

$$M(x, y, z) \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t \cdot \vec{n} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) : (D) \text{ إذن تمثيل بارامتري للمستقيم } (D)$$

2. لدينا النقطة B هي نقطة تقاطع المستقيم (D) و المستوى (P) و بالتالي مثلث ملوث إحداثياتها يحقق :

$$B(3,1,1) \text{ أي : } t=1 \text{ ومنه : } \begin{cases} x = 2+t \\ y = t \\ z = 2-t \\ x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

3. (أ)

$$R^2 = r^2 + AB^2$$

$$R = \sqrt{r^2 + AB^2}$$

$$R = \sqrt{(2)^2 + (\sqrt{3})^2}$$

$$R = \sqrt{7}$$

(ب) معادلة ديكارتية للفاكدة (S) : $(x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-2)^2 = (\sqrt{7})^2$

$$\text{أي : } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4z + 1 = 0$$

تصحيح التمرين 6

1. معادلة ديكارتية للفاكدة (S) التي مركزها $\Omega(1, -1, 0)$ و شعاعها $R = \sqrt{3}$:

$$(x-1)^2 + (y-(-1))^2 + (z-0)^2 = (\sqrt{3})^2$$

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 1 = 0$$

$$\text{لدينا : } (0)^2 + (0)^2 + (1)^2 - 2(0) + 2(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

إذن : $A(0, 0, 1) \in (S)$

2. (أ) لدينا : $\overrightarrow{AB}(1, 1, 0)$ و $\overrightarrow{AC}(2, 1, 1)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$$

لدينا : $(ABC) \vec{AB} \wedge \vec{AC} (1, -1, -1)$ منظمية للمستوى

إذن معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $x - y - z + d = 0$

و لدينا : $A(0,0,1) \in (ABC)$ إذن : $(0) - (0) - (1) + d = 0$ و منه : $d = 1$

و بالتالي : $(ABC) : x - y - z + 1 = 0$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|(1) - (-1) - (0) + 1|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad (\text{ب})$$

بما أن : $d(\Omega, (ABC)) = R$ فإن (ABC) مماس للكرة (S)

و بما أن $A \in (ABC)$ و $A \in (S)$ فإن (ABC) مماس للكرة (S) في النقطة A

3. أ) لدينا : $(\Delta) \perp (ABC)$ و $(ABC) \vec{AB} \wedge \vec{AC} (1, -1, -1)$ منظمية للمستوى

إذن : $(\Delta) \vec{AB} \wedge \vec{AC} (1, -1, -1)$ متجهة موجهة للمستقيم (Δ)

$$M(x, y, z) \in (\Delta) \Leftrightarrow \vec{\Omega M} = t \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = t \\ y + 1 = -t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = -t \end{cases}$$

ب) مثلوثي إحداثيات نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الكرة (S) هما حل النظمة :

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - t \\ z = -t \\ (x - 1)^2 + (y + 1)^2 + z^2 = 3 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

نجد بالتعويض : $t^2 = 1$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2 \\ z = -1 \\ t = 1 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

إذن مثلوث إحداثيتي نقطتي تقاطع المستقيم (Δ) و الكرة (S) هما : $(0, 0, 1)$ و $(2, -2, -1)$

تصحيح التمرين 7

1. لدينا : $\vec{AB}(1,1,2)$ و $\vec{AC}(5,9,2)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \vec{k} = -16\vec{i} + 8\vec{j} + 4\vec{k}$$

$$d(C, (AB)) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\sqrt{336}}{\sqrt{6}} = \sqrt{56} \quad .2$$

3. لدينا : $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-16,8,4)$ متجهة منظمية للمستوى (ABC)

إذن معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) تكتب على شكل : $-16x + 8y + 4z + d = 0$

ولدينا : $A(0,1,-1) \in (ABC)$ إذن : $-16(0) + 8(1) + 4(-1) + d = 0$ إذن : $d = 12$

و منه : المعادلة تصبح : $-16x + 8y + 4z + 12 = 0$

و بالتالي معادلة (ABC) هي : $-4x + 2y + z + 3 = 0$

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10x - 20y - 2z + 70 = 0 \quad \text{لدينا : (أ) 4}$$

$$(x-5)^2 + (y-10)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{56})^2 \quad \text{تكافئ}$$

إذن : (S) هي الفلكة التي مركزها $C(5,10,1)$ و شعاعها $R = \sqrt{56}$

(ب) بما أن $d(C, (AB)) = R$ فإن (AB) مماس للفلكة (S)

$$\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = 1+t \\ z = -1+2t \\ (x-5)^2 + (y-10)^2 + (z-1)^2 = 56 \end{array} \right. \quad (t \in \mathbb{R})$$

مثلث إحداثيات نقطة لتمامس يحقق :

بالتعويض نجد : $t = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 4 \\ z = 5 \end{array} \right. \quad \text{و منه :}$$

إذن النقطة $H(3,4,5)$ هي نقطة لتمامس