

تصحيح الفرض رقم 02

رأسي سوحد نحو الأسفل.

③ المشتقة $f'(x)$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{1}{2}x\right)' - 2' + \left(\frac{4}{\sqrt{x+1}}\right)' \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{4'(\sqrt{x+1}) - 4(\sqrt{x+1})'}{(\sqrt{x+1})^2} \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{-4}{2\sqrt{x}} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})^2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})^2 - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(x + 2\sqrt{x} + 1) - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x} - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{\sqrt{x}(x+1) - (x+1) + 3(x-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + 3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x+1})}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+1+3(\sqrt{x}+1))}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} \\
 &= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+3\sqrt{x}+4)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x+1})}
 \end{aligned}$$

صاحبة التلميذة

صاحبة جويج ~

الفرض الأول:

② تحديد D_f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0, \sqrt{x+1} \neq 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}.$$

$$D_f = \mathbb{R}^+$$

$$D_f = [0; +\infty[.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2.$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

③ قابلية الاشتقاق على $x=0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x - 2 + \frac{4}{\sqrt{x+1}} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x - 4 + \frac{4}{\sqrt{x+1}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{4}{x(\sqrt{x+1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - 4 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}) = 0^+ \quad \sqrt{x}(\sqrt{x+1}) > 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} = -\infty$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x+1})} = -\infty$$

وعليه فإن f غير قابلة للاشتقاق على

نقطة 0 . إذن f يقبل نصف ماس

③ بين أن V_n هندسية :

$$\begin{aligned} V_{n+1} = 1 - \frac{1}{U_{n+1}} &\Leftrightarrow V_{n+1} = 1 - \frac{1+2U_n}{3U_n} \\ &= \frac{U_n - 1}{3U_n} \\ &= \frac{U_n}{3U_n} - \frac{1}{3U_n} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3U_n} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{U_n} \right) \\ &= \frac{1}{3} V_n \end{aligned}$$

وعليه V_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} V_0 &= 1 - \frac{1}{U_0} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$V_n = 1 - \frac{1}{U_n} \Leftrightarrow V_n - 1 = -\frac{1}{U_n} \quad \text{④}$$

$$\frac{1}{V_n - 1} = -U_n$$

$$U_n = \frac{1}{1 - V_n}$$

$$V_n = V_0 q^n$$

$$= -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

$$U_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

$$U_n = \frac{1}{\frac{3^n + 1}{3^n}}$$

$$U_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$$

نهاية U_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n \left[1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1$$

لأن $-1 < \frac{1}{3} < 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

بإشراف الأستاذ

الماتري بوشعيب

* جدول التغيرات:

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x} - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\sqrt{x} - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

التعريف الثاني:

① بين أن $0 < U_n < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

مذاجل $n=0$ $0 < U_0 = \frac{1}{2} < 1$

نفترض أن $0 < U_n < 1$

وبين أن $0 < U_{n+1} < 1$

$$U_{n+1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2U_n + 1} \right) \quad \text{لدينا}$$

و

$$0 < U_n < 1 \Rightarrow 1 < 2U_n + 1 < 3$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{1}{2U_n + 1} < \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{2U_n + 1} < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2U_n + 1} \right) < 1$$

$$\Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1$$

وعليه $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < U_n < 1$

② رتبة U_n :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n}{2U_n + 1} - U_n$$

$$= \frac{2U_n(1 - U_n)}{2U_n + 1}$$

$$2U_n + 1 > 0 \quad \text{و} \quad 0 < 1 - U_n < 1$$

$$0 < 2U_n(1 - U_n) < 2$$

$$U_{n+1} > U_n \quad \text{إذن}$$

وعليه U_n متتالية تزايدية.