

تمرين الاول:

لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي : $U_0 = 1$
 $U_{n+1} = \frac{3U_n+2}{2+U_n}$; $n \in \mathbb{N}$

(1) احسب U_1 و U_2

$$U_2 = \frac{3U_1+2}{2+U_1} = \frac{21}{11} \text{ و } U_1 = \frac{3U_0+2}{2+U_0} = \frac{5}{3}$$

(2) بين بالترجع $1 \leq U_n < 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$ من اجل $n=0$ لدينا $U_0 = 1$ و $1 \leq 1 < 2$ اذن $1 \leq U_0 < 2$ نفترض ان : $1 \leq U_n < 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$ و نبين ان $1 \leq U_{n+1} < 2$

$$\text{لدينا } U_{n+1} - 2 = \frac{U_n - 2}{U_n + 2} \text{ و لدينا } 1 \leq U_n < 2 \text{ فإن } \frac{U_n - 2}{U_n + 2} < 0 \text{ اي } U_{n+1} < 2$$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n}{U_n + 2} \text{ و لدينا } U_n > 0 \text{ فإن } \frac{2U_n}{U_n + 2} > 0 \text{ اي } U_{n+1} > 1$$

وبالتالي $1 \leq U_{n+1} < 2$ ومنه $1 \leq U_n < 2$; $\forall n \in \mathbb{N}$ (3) أ- تحقق من ان $U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3U_n+2}{2+U_n} - U_n = \frac{3U_n+2-U_n^2-2U_n}{2+U_n} = \frac{-U_n^2+U_n+2}{2+U_n} = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n}$$

ب- ادرس رتبة المتتالية (U_n)

$$\text{لدينا } U_{n+1} - U_n = \frac{(U_n+1)(2-U_n)}{2+U_n} \text{ و } 1 \leq U_n < 2 \text{ ; } \forall n \in \mathbb{N} \text{ فإن } 2 - U_n > 0$$

$$\text{و } \frac{U_n+1}{2+U_n} > 0 \text{ و منه } U_{n+1} > U_n \text{ و بالتالي فإن } (U_n) \text{ تزايدية قطعاً}$$

ج- استنتج ان (U_n) متقاربةبما أن (U_n) تزايدية ومكبورة بالعدد 2 فإنها متقاربة

$$(4) \text{ نضع } V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2} \text{ ; } \forall n \in \mathbb{N}$$

أ- بين ان (V_n) متتالية هندسية اساسها 4

$$V_{n+1} = \frac{U_{n+1}+1}{U_{n+1}-2} = \frac{\frac{3U_n+2}{2+U_n}+1}{\frac{3U_n+2}{2+U_n}-2} = \frac{U_n+1}{U_n-2} = 4V_n$$

وبالتالي (V_n) متتالية هندسية اساسها 4 و حدها الاول -2 $V_0 = \frac{U_0+1}{U_0-2} = -2$

لنحدد V_n بدلالة n $V_n = V_0 q^n = -2 \times 4^n$; $\forall n \in \mathbb{N}$

ب- لنبين ان $U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1}$

$$V_n = \frac{U_n+1}{U_n-2} \Leftrightarrow (U_n - 2) V_n = U_n + 1 \Leftrightarrow U_n (V_n - 1) = 2V_n + 1$$

وبالتالي $\forall n \in \mathbb{N} U_n = \frac{2V_n+1}{V_n-1}$

لنحسب نهاية (U_n)

$$U_n = \frac{2V_n + 1}{V_n - 1} = \frac{2 \times -2 \times 4^n + 1}{-2 \times 4^n - 1} = \frac{-4^{n+1} + 1}{-2 \times 4^n - 1} = \frac{4^n(4 - \frac{1}{4^n})}{4^n(2 + \frac{1}{4^n})} = \frac{4 - \frac{1}{4^n}}{2 + \frac{1}{4^n}}$$

وبالتالي $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 - \frac{1}{4^n}}{2 + \frac{1}{4^n}} = 2$ لان $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{4^n} = 0$

تمرين 2:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{x(x^2 - 1)} ; x > 1 \\ x\sqrt{1-x} ; x \leq 1 \end{cases}$$

1- بين ان الدالة f متصلة في 1

لدينا $f(0)=1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt[3]{x(x^2 - 1)} = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x\sqrt{1-x} = 0 = f(0)$$

وبما ان $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0 = f(0)$ وبالتالي f متصلة في 1

2- أ- ادرس قابلية اشتقاق f على اليسار وعلى اليمين في 1

لندرس قابلية اشتقاق f على اليسار في 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x\sqrt{1-x}}{-(1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x}{\sqrt{1-x}} = -\infty$$

وبالتالي f غير قابلية اشتقاق على اليسار في 1

لـ لندرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 1

$$\lim_{1^+} \frac{\sqrt[3]{x(x^2 - 1)}}{x - 1} = \lim_{1^+} \sqrt[3]{\frac{x(x^2 - 1)}{(x - 1)^3}} = \lim_{1^+} \sqrt[3]{\frac{x(x + 1)}{(x - 1)^2}} = +\infty$$

وبالتالي f غير قابلية اشتقاق على اليمين في 1

ت- اعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليها

❖ وبما ان f غير قابلية اشتقاق على اليسار في 1 فان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي نحو

الاسفل على يسار 1

❖ بما ان f غير قابلية اشتقاق على اليمين في 1 فان منحنى الدالة f يقبل نصف مماس عمودي نحو

الاعلى على يمين 1

3- ضع جدول تغيرات الدالة f

لـ لكل $x > 1$ لدينا $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)}$

الدالة $x \mapsto x(x^2 - 1)$ موجبة قطعاً وقابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$

اذن الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x(x^2 - 1)}$ قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$

لدينا: $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) = \frac{3x^2 - 1}{3\sqrt[3]{(x(x^2 - 1))^2}}$

اشارة $f'(x)$ على $]1; +\infty[$ هي اشارة $3x^2 - 1$ بما ان $x > 1$ فان $3x^2 > 3$ وبالتالي $3x^2 - 1$

$1 > 0$

لـ ليكن x عنصر من المجال $]1; +\infty[$ لدينا $f(x) = x\sqrt{1 - x}$

الدالة $f = uv$ اذن f قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ (لانها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق)

لدينا: $\forall x \in]1; +\infty[; f'(x) = \sqrt{1 - x} + x \frac{-1}{2\sqrt{1 - x}} = \frac{2 - 3x}{2\sqrt{1 - x}}$

❖ اشارة $f'(x)$ على $]1; +\infty[$ هي اشارة $2 - 3x$

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$2 - 3x$	$+$	\circ	$-$

❖ جدول تغيرات الدالة f

x	$-\infty$	$\frac{2}{3}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{2\sqrt{3}}{9}$	0	$+\infty$

4- أ- احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ واول هندسيا النتيجة المتوصل اليها

احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{1-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1-x} = +\infty$$

للم التاويل الهندسي :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

وبالتالي فإن منحنى الدالة f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الارايب بجوار $-\infty$

ب- بين ان $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ ، ماذا تستنتج ؟

لنحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{x(x^2 - 1)} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x - x^3}{\sqrt[3]{(x(x^2 - 1))^2 + x^3 \sqrt{x(x^2 - 1) + x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt[3]{(x(x^2 - 1))^2 + x^3 \sqrt{x(x^2 - 1) + x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x \left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \sqrt{x(x^2 - 1) + x}} \right)} = 0$$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt[3]{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^2 + \sqrt{x(x^2 - 1) + x}} \right) = +\infty \right) \text{ لان}$$

للم التاويل الهندسي :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

وبالتالي فإن منحنى الدالة f يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$

ج- ادرس الوضع النسبي للمنحنى الدالة f بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x$

$$f(x) - x = \frac{-x}{\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2 + x^3} + \sqrt[3]{x(x^2-1)} + x^2}$$

وبما أن $\sqrt[3]{(x(x^2-1))^2 + x^3} + \sqrt[3]{x(x^2-1)} + x^2 > 0$ و $-x < 0$ لكل x من المجال $[1; +\infty[$

وبالتالي $f(x) - x < 0$ على المجال $[1; +\infty[$

د- انشئ المنحنى (C) في معلم متعامد ممنظم

5- بين ان g قصور الدالة f على المجال $[1; +\infty[$ تقبل دالة عكسية معرفة على J تم تحديده

لدينا $x \mapsto x^3 - x$ متصلة و موجبة على المجال $[1; +\infty[$ ومنه g متصلة على المجال $[1; +\infty[$ وتزايدية قطعا على المجال $[1; +\infty[$ وبالتالي g تقبل دالة عكسية معرفة على المجال J

$$g([1; +\infty[) = [g(1); \lim_{+\infty} f(x)[= [0; +\infty[$$

انشئ $(C_{g^{-1}})$ منحنى الدالة g^{-1} في نفس المعلم السابق

منحنيان (C_g) و $(C_{g^{-1}})$ متماثلان بالنسبة للمنصف الاول للمعلم ، اي بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة

$$y = x$$

تمرين 3(*): لتكن (U_n) المتتالية العددية المعرفة بمايلي :

$$\begin{cases} U_0 = U_1 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + U_{n-1} ; n \geq 1 \end{cases}$$

1- بين ان لكل n من \mathbb{N} : $U_n \geq n$ ثم احسب نهاية U_n

لنبين ان لكل n من \mathbb{N} : $U_n \geq n$

من اجل $n=0$ لدينا $U_0 = 1$ و $1 \geq 0$ اذن $U_0 \geq 0$

نفترض ان : $U_n \geq n$; $\forall n \in \mathbb{N}$ و نبين ان $U_{n+1} \geq n+1$

لدينا $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ و اي ان $U_{n+1} - U_n = U_{n-1} > 0$

(لان $U_{n-1} \geq n-1 > 0$) ومنه فإن (U_n) المتتالية تزايدية قطعا

اي ان $U_n \geq U_{n-1} \geq U_1$

وبالتالي $U_{n+1} = U_n + U_{n-1} \geq n + 1$ اي $U_{n+1} \geq n + 1$

وبالتالي لكل $n \in \mathbb{N}$ من $U_n \geq n$

ومنه $\forall n \in \mathbb{N}; 1 \leq U_n < 2$

لـ احسب نهاية U_n :

لدينا $\lim_{+\infty} n = +\infty$ وبما ان $U_n \geq n$ وبالتالي $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$

2- بين بالترجع ان : $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

من اجل $n=1$ لدينا $U_1 = 1$ و $U_0 = 1$ و $U_2 = U_1 + U_0 = 2$

وبالتالي $U_1^2 = U_0 \times U_2 + (-1)^1 = 2 - 1 = 1$

نفترض ان : $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$; $\forall n \in \mathbb{N}^*$

و نبين ان $U_{n+1}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$

لدينا $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ ومنه $U_{n+1} \times U_{n+1} = U_n \times U_{n+1} + U_{n-1} \times U_{n+1}$

فان $U_{n+1}^2 = U_n \times U_{n+1} + U_n^2 - (-1)^n$

اي $U_{n+1}^2 = U_n \times \underbrace{(U_{n+1} + U_n)}_{U_{n+2}} - (-1)^n$

وبالتالي $U_{n+1}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$

اذن $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $U_n^2 = U_{n-1} \times U_{n+1} + (-1)^n$

3- نضع ان $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$; $\forall n \in \mathbb{N}$

بين ان $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$ ، ثم استنتج نهاية $V_{n+1} - V_n$

لـ لنبين ان $V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$

لدينا $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$ اي $V_{n+1} = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}}$

يعني ان $V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+2}}{U_{n+1}} - \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{U_n \times U_{n+2} - U_{n+1}^2}{U_n U_{n+1}} = \frac{-(-1)^{n+1}}{U_n U_{n+1}} = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}}$

(لان $U_{n+1}^2 = U_n \times U_{n+2} + (-1)^{n+1}$)

لـ نستنتج نهاية $V_{n+1} - V_n$:

لان $U_{n+1} \geq n + 1$

لدينا $\lim_{+\infty} U_n = +\infty$ فان $\lim_{+\infty} U_{n+1} = +\infty$ (حسب سؤال 1)

وبالتالي $\lim_{+\infty} U_n \times U_{n+1} = +\infty$

$$\frac{-1}{U_n U_{n+1}} \leq V_{n+1} - V_n = \frac{(-1)^n}{U_n U_{n+1}} \leq \frac{1}{U_n U_{n+1}} : \text{وبمأن}$$

$$\lim_{+\infty} \frac{1}{U_n U_{n+1}} = \lim_{+\infty} \frac{-1}{U_n U_{n+1}} = 0 \text{ ولدينا}$$

$$\lim_{+\infty} V_{n+1} - V_n = 0 \text{ وبالتالي حسب مبرهنة الدركيين فإن}$$