تصحيح التمرين الأول

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x}\right)^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$

إذن : لكل x من $\mathbb{R}$: $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1$

من الواضح أن : $\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R} / e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0\right\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 > 0\right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

2) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = \ln 2$

لأن : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = 2$ و الدالة $\ln$ متصلة في 2.

<u>التأويل الهندسي :</u> (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = \ln 2$ بجوار $-\infty$

3) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1\right) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{e^x} - 1\right)^2 + 1 = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \end{cases}$

4) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

✓

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) \\ &= \ln\left(e^x \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right) \\ &= \ln\left(e^x\right) + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \\ &= x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = \ln 1 = 0$$ ✓

لأن $\lim_{x \to +\infty}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = 1$ و الدالة $\ln$ متصلة في 1.

<u>التأويل الهندسي :</u> (C_f) يقبل مقاربامائلا معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$

5) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)\right)' \\ &= \frac{\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right)'}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - 2.\frac{\left(e^x\right)'}{2\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \frac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \sqrt{e^x}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x} - 1\right)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ و $\sqrt{e^x} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{e^x} - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{e^x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{(ex)}-1$	$-$	0	$+$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$ln2$ ↘	0	↗ $+\infty$

6) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f''(x) = \left(\frac{\sqrt{e^x}\left(\sqrt{e^x}-1\right)}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}\right)'$$

$$= \left(\frac{e^x-\sqrt{e^x}}{e^x-2\sqrt{e^x}+2}\right)'$$

$$= \frac{\left(e^x-\sqrt{e^x}\right)'.\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)-\left(e^x-\sqrt{e^x}\right).\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)'}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

$$= \frac{\left(e^x-\frac{\sqrt{e^x}}{2}\right).\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)-\left(e^x-\sqrt{e^x}\right).\left(e^x-\sqrt{e^x}\right)}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-2e^x\sqrt{e^x}+2e^x-\frac{e^x\sqrt{e^x}}{2}+e^x-\sqrt{e^x}-e^{2x}+2\sqrt{e^x}e^x-e^x}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

$$= \frac{2e^x-\frac{e^x\sqrt{e^x}}{2}-\sqrt{e^x}}{\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{-\sqrt{e^x}}{2}\left(-4\sqrt{e^x}+e^x+2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2} = \frac{-\sqrt{e^x}\left(\left(\sqrt{e^x}\right)^2-4\sqrt{e^x}+4-2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$$

إذن : $f''(x)=\dfrac{-\sqrt{e^x}\left(\left(\sqrt{e^x}-2\right)^2-2\right)}{2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لندرس تقعر (C_f) :

لدينا : $\sqrt{e^x}>0$ و $2\left(e^x-2\sqrt{e^x}+2\right)^2>0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $-\left(\left(\sqrt{e^x}-2\right)^2-2\right)$

x	$-\infty$		$2ln(2-\sqrt{(2)})$		$2ln(2+\sqrt{(2)})$		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

على المجال $\left]-\infty,2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)\right]$: $f''(x)\leq 0$ إذن (C_f) مقعر

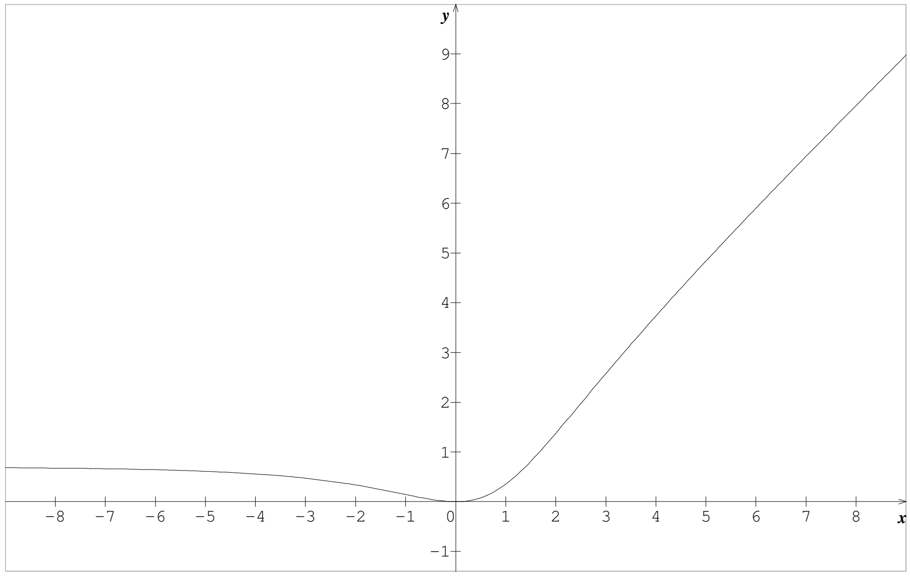
على المجال $\left[2\ln\left(2-\sqrt{2}\right),2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\right]$: $f''(x)\geq 0$ إذن (C_f) محدب

على المجال $\left[2\ln\left(2+\sqrt{2}\right),+\infty\right[$: $f''(x)\leq 0$ إذن (C_f) مقعر

و بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)$ فإن النقطة $I\left(2\ln\left(2-\sqrt{2}\right),f\left(2\ln\left(2-\sqrt{2}\right)\right)\right)$ هي نقطة انعطاف

و كذلك f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)$ فإن النقطة $J\left(2\ln\left(2+\sqrt{2}\right),f\left(2\ln\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\right)$ هي نقطة انعطاف

(7



8) المعادلة $\left(x \in \mathbb{R}\right) \quad e^x - e^m = 2\left(-1+\sqrt{e^x}\right)$ تكافئ $\left(x \in \mathbb{R}\right) \quad e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^m$

تكافئ $\left(x \in \mathbb{R}\right) \quad \ln\left(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2\right) = m$

تكافئ $\left(x \in \mathbb{R}\right) \quad f\left(x\right) = m$

- ✓ إذا كان $m < 0$: المعادلة لا تقبل حلا
- ✓ إذا كان $m = 0$: المعادلة لها حلا وحيدا
- ✓ إذا كان $0 < m < \ln 2$: المعادلة تقبل حلين
- ✓ إذا كان $m \geq \ln 2$: المعادلة لها حلا وحيدا

9) أ- لدينا g متصلة و تزايدية قطعا على المجال $\left[0,+\infty\right[$ (لأن g قصور f على المجال $\left[0,+\infty\right[$)

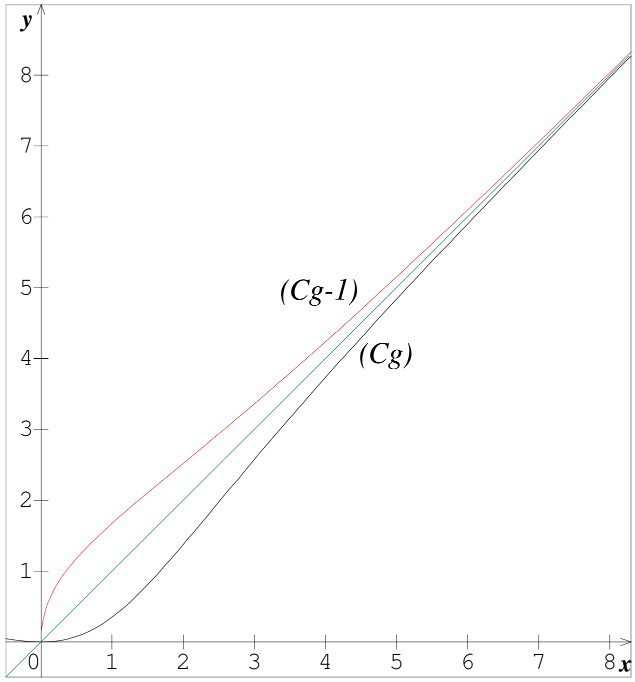
إذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من المجال $J = g\left(\left[0,+\infty\right[\right) = \left[0,+\infty\right[$ نحو $\left[0,+\infty\right[$

ب- ليكن $x \in \left[0,+\infty\right[$:

$$y = g^{-1}(x) \qquad \Leftrightarrow x = g(y)$$
$$\Leftrightarrow x = \ln\left(\left(\sqrt{e^{y}} - 1\right)^{2} + 1\right)$$
$$\Leftrightarrow e^{x} = \left(\sqrt{e^{y}} - 1\right)^{2} + 1$$
$$\Leftrightarrow e^{x} - 1 = \left(\sqrt{e^{y}} - 1\right)^{2}$$
$$\Leftrightarrow \left|\sqrt{e^{y}} - 1\right| = \sqrt{e^{x} - 1}$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{e^{y}} - 1 = \sqrt{e^{x} - 1}\,(y \geq 0)$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{e^{y}} = 1 + \sqrt{e^{x} - 1}$$
$$\Leftrightarrow e^{y} = \left(1 + \sqrt{e^{x} - 1}\right)^{2}$$
$$\Leftrightarrow y = \ln\left(\left(1 + \sqrt{e^{x} - 1}\right)^{2}\right)$$
$$\Leftrightarrow y = 2\ln\left(1 + \sqrt{e^{x} - 1}\right)$$

إذن لكل x من $[0,+\infty[$: $g^{-1}(x) = 2\ln\left(1 + \sqrt{e^{x} - 1}\right)$

ج-



تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \ln\left(e^x+2\right) = \ln(2)$

لأن $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+2=2$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0\right)$ و الدالة $\ln$ متصلة في 2

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y=\ln 2$ بجوار $-\infty$

2) أ- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(e^x+2\right) = +\infty$

لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} e^x+2=+\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty \end{cases}$

ب- ليكن $x\in\mathbb{R}$:

✓

$$f(x)=\ln\left(e^x+2\right)=\ln\left(e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)\right)=\ln\left(e^x\right)+\ln\left(1+\frac{2}{e^x}\right)=x+\ln\left(1+2e^{-x}\right)$$

إذن : $f(x)=x+\ln\left(1+2e^{-x}\right)$ لكل x من $\mathbb{R}$

✓ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(1+2e^{-x}\right) = \lim\limits_{t\to-\infty} \ln\left(1+2e^{t}\right) = \ln(1)=0$

لأن : $\lim\limits_{t\to-\infty} 1+2e^t=1$ و الدالة $\ln$ متصلة في 1

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y=x$ بجوار $+\infty$

3) لندرس تغيرات الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $e^x+2>0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

ليكن $x\in\mathbb{R}$:

$$f'(x)=\left(\ln\left(e^x+2\right)\right)'=\frac{\left(e^x+2\right)'}{e^x+2}=\frac{e^x}{e^x+2}$$

من الواضح أن $f'(x)>0$ ($e^x>0$)

إذن f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$ $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$ln2 \nearrow +\infty$

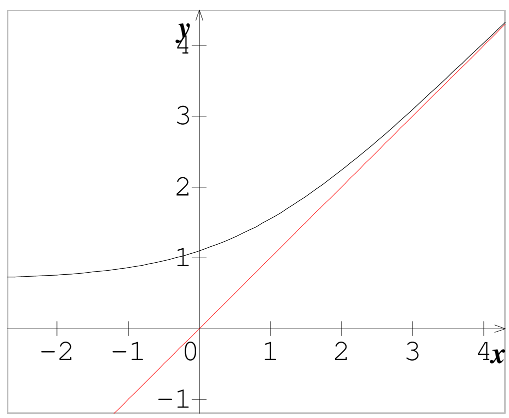
الجزء الثاني :

1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - x = \ln\left(1 + 2e^{-x}\right)$$

نعلم أن $2e^{-x} > 0$ إذن $1 + 2e^{-x} > 1$ إذن $\ln\left(1 + 2e^{-x}\right) > 0$ إذن $f(x) - x > 0$

و منه (C_f) يوجد فوق (Δ)



2) التكامل $I = \int_2^3 \left|f(x) - x\right| dx$ هو مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 2$ و $x = 3$

3) أ- لنبين أن لكل t من $[0, +\infty[$: $\ln(1+t) \leq t$

نعتبر الدالة $u : t \mapsto \ln(1+t) - t$

$$u'(t) = \left(\ln(1+t) - t\right)' = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{1-1-t}{1+t} = \frac{-t}{1+t}$$

لدينا $t \geq 0$ إذن $\frac{-t}{1+t} \leq 0$ إذن $u'(t) \leq 0$ و منه الدالة u تناقصية

وبما أن $t \geq 0$ فإن $u(t) \leq u(0)$

و بالتالي : $\ln(1+t) - t \leq 0$

نستنتج أن لكل t من $[0, +\infty[$: $\ln(1+t) \leq t$

ب- لدينا لكل t من $[0, +\infty[$: $\ln(1+t) \leq t$

و بنا أن لكل x من $\mathbb{R}$: $2e^{-x} > 0$

فإن : $\ln\left(1+2e^{-x}\right) \leq 2e^{-x}$

ج- لدينا : لكل x من $\mathbb{R}$: $0 \leq \ln\left(1+2e^{-x}\right) \leq 2e^{-x}$

إذن $0 \leq \int_2^3 \ln\left(1+2e^{-x}\right)dx \leq \int_2^3 2e^{-x}dx$

و منه $0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-x}dx$ $\quad$ ($f(x)-x=\ln\left(1+2e^{-x}\right)>0$)

د-

✓ $\int_2^3 2e^{-x}dx = 2\int_2^3 e^{-x}dx = 2\left[-e^{-x}\right]_2^3 = 2\left(e^{-2}-e^{-3}\right)$

✓ $0 \leq I \leq 2\left(e^{-2}-e^{-3}\right)$

$0 \leq I \leq 2\left(e^{-2}-e^{-3}\right) \leq 0,2$

و هذا تأطير سعته $0,2$

つづく