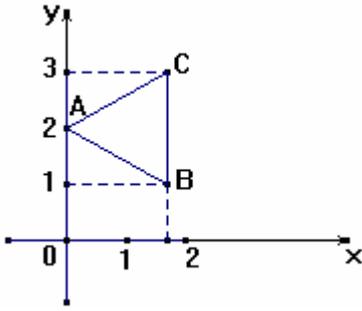


(b) - إنشاء  $A(a = 2i)$  و  $B(b = \sqrt{3} + i)$  و  $C(c = \sqrt{3} + 3i)$ :



$$(a) - \left( \frac{b-a}{c-a} \right) = \frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \boxed{\left[ 1, -\frac{\pi}{3} \right]}$$

(b) - نستنتج أن المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع

$$(a) - c - a = (\sqrt{3} + 3i) - (2i) = \sqrt{3} + i = b$$

(b) - لدينا  $c - a = b - 0$  إذن  $\overline{AC} = \overline{OB}$  ولدينا المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع ومنه فإن الرباعي  $OBCA$  معين.

**التمرين الثالث:**

(1) عدد النتائج الممكنة هو:  $A_5^2 \times A_4^1 = (5 \times 4) \times 4 = \boxed{80}$

(2) عدد النتائج التي تكون فيها الكرات الثلاث تحمل الرقم 0 هو:

$$A_3^2 \times A_2^1 = (3 \times 2) \times 2 = \boxed{12}$$

(3) عدد النتائج التي يكون فيها مجموع أرقام الكرات الثلاث يساوي 2 هو

$$A_2^2 \times A_2^1 + A_2^1 \times A_3^1 \times A_2^1 + A_3^1 \times A_2^1 \times A_2^1 = \boxed{28}$$

**التمرين الرابع:**

$$\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx = \int_{-1}^0 (1 - e^x) dx + \int_0^1 (e^x - 1) dx$$

$$= [x - e^x]_{-1}^0 + [e^x - x]_0^1 = \boxed{\frac{1}{e} + e - 2}$$

$$\int_e^{e^2} \left( \frac{1}{x \ln(x)} \right) dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln'(x)}{e \ln(x)} dx$$

$$= [\ln(\ln(x))]_e^{e^2} = \boxed{\ln(2)}$$

(2) - (a) ليكن  $x \in \left[ \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3} \right]$

$$\frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\sin^2(x)}$$

$$= \frac{\cos^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{1 + \tan^2(x)}{\tan^2(x)}$$

(b) -

$$\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2(x)} = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left( \frac{1 + \tan^2(x)}{\tan^2(x)} \right) dx$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\tan'(x)}{\tan^2(x)} dx = \left[ -\frac{1}{\tan(x)} \right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \boxed{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}$$

**التمرين الأول:**

(1) (a) - لدينا  $\overline{AB}(1, 0, -1)$  و  $\overline{AC}(0, -2, -2)$  إذن

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= -2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k} = \boxed{-2(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})}$$

(b) - بما أن  $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$  فإن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  غير مستقيمية.

(2) نستنتج من (1) أن المتجهة  $\vec{n} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$  منظمة على

المستوى  $(ABC)$  إذن معادلة هذا الأخير هي على شكل:

$$x - y + z + d = 0$$

وبما أن  $A(0, 1, 1) \in (ABC)$  فإن  $d = 0$  وبالتالي فإن:

$$(ABC): x - y + z = 0$$

(3) (a) - يمكن لمعادلة الفلكة  $(S)$  أن نكتب:

$$\boxed{R=1} \quad (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = (1)^2$$

و مركزها هو  $\Omega(1, 2, 0)$

(b) - لتكن  $d$  مسافة  $\Omega$  عن المستوى  $(ABC)$  لدينا:

$$d = \frac{|1 - 2 + 0|}{\sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + (1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

فإن: المستوى  $(ABC)$  يقطع الفلكة  $(S)$  وفق دائرة  $(\Gamma)$

(c) - ليكن  $R'$  شعاع  $(\Gamma)$ ؛  $R' = \sqrt{R^2 - d^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

\*\*لتكن النقطة  $H(x_H, y_H, z_H)$  مركز  $(\Gamma)$ ؛ نجد من

$$H \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} : k \in \mathbb{R} ; \begin{cases} x_H = 1 + k \\ y_H = 2 - k \\ z_H = k \end{cases} \text{ و } x_H - y_H + z_H = 0$$

(4) ليكن  $(P)$  أحد المستويين الموازيين ل  $(ABC)$  و المماسين ل  $(S)$

معادلة  $(P)$  هي على شكل:  $x - y + z + m = 0 / m \in \mathbb{R}$

لتكن  $d'$  مسافة  $\Omega$  عن  $(P)$  لدينا  $d' = R$  و

$$d' = R \Leftrightarrow \frac{|1 - 2 + 0 + m|}{\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow m = 1 - \sqrt{3} \text{ أو } m = 1 + \sqrt{3}$$

وبالتالي فإن المستويين الموازيين ل  $(ABC)$  و المماسين ل  $(S)$  هما:

$$\begin{cases} (P_1): x - y + z + 1 - \sqrt{3} = 0 \\ (P_2): x - y + z + 1 + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

**التمرين الثاني:**  $(E): z \in \mathbb{C}; z^2 - (\sqrt{3} + 3i)z - 2 + 2i\sqrt{3} = 0$

(1) - (a)  $(-\sqrt{3} + i)^2 = 2 - 2i\sqrt{3}$

(b) - مميز  $(E)$  هو  $\Delta = 2 - 2i\sqrt{3} = (-\sqrt{3} + i)^2 \neq 0$  إذن ل  $(E)$

حلين مختلفين هما:  $a = 2i$  و  $b = (\sqrt{3} + i)$  وبالتالي:  $S = \{a, b\}$

(2) - (a)  $b = \left[ 2, \frac{\pi}{6} \right]$  و  $c = \left[ 2\sqrt{3}, \frac{\pi}{3} \right]$

و نستنتج هندسيا أن  $(C_f)$  يقبل في 0 مماس معادلته  $y = f(0)$

$$\boxed{y = 1} \text{ أي}$$

(a) (3)

$$(\forall x \in ]0, +\infty[), f'(x) = [e^{-x} + \ln(x+1)]'$$

$$= -e^{-x} + \frac{1}{x+1} = e^{-x} \left( \frac{e^x}{x+1} - 1 \right)$$

$$= e^{-x} \left( \frac{e^x - x - 1}{x+1} \right) = \boxed{\frac{e^{-x} g(x)}{(x+1)}}$$

(b)

$$(\forall x \in ]-\infty, 0[), f'(x) = \left( \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1 \right)'$$

$$= \left( -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \left( -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) \right) = \boxed{\left( -\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \right) (x+1)}$$

بما أن  $x < 0$  فإن  $-\frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} > 0$  إذن إشارة  $f'(x)$  هي إشارة  $x+1$ .

(c)

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+	+
$f(x)$	1	$1 - \frac{1}{e}$	1	$+\infty$

(a) (4)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x} + \ln(x+1)}{x}$$

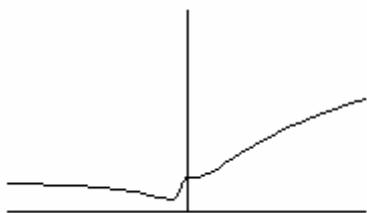
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{xe^x} + \frac{\ln(x+1)}{x+1} \cdot \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right] = 0$$

(b)

\*  $(C_f)$  يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأفاصيل

\*  $(C_f)$  يقبل مقارب أفقي بجوار  $-\infty$  معادلته هي:  $y = 1$

(c)



$$\lambda(\Delta) = \int_0^1 (e^{-x} + \ln(x+1)) dx$$

$$= [-e^{-x} + (x+1) \ln(x+1) - (x+1)]_0^1$$

$$= \boxed{-e^{-1} + 2 \ln(2)}$$

(3)

$$J = [x \cos(\pi \ln(x))]_1^e + \pi \int_1^e x \sin(\pi \ln(x)) \frac{1}{x} dx$$

$$= -(e+1) + \pi \int_1^e \sin(\pi \ln(x)) dx = -(e+1) + \pi K$$

$$K = [x \sin(\pi \ln(x))]_1^e - \pi \int_1^e x \cos(\pi \ln(x)) \frac{1}{x} dx$$

$$K = -\pi J \text{ إذن}$$

$$J = -(e+1) - \pi^2 J \text{ وبالتالي}$$

$$\boxed{J = -\left( \frac{e+1}{\pi^2 + 1} \right)} \text{ ومنه}$$

**مسألة:**  
الجزء الأول:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x - 1) = +\infty \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty \text{ و}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}), g'(x) = e^x - 1 \quad \text{(a) (2)}$$

(b)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		0	
$g(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(c) بما أن 0 قيمة دنيا مطلقة للدالة g عند 0 فإنه:

$$\boxed{(\forall x \in \mathbb{R}^*), g(x) > 0}$$

(3) نعتبر الدالة h بحيث:  $(\forall x \in ]1, 2[), h(x) = g(x) - x$ ، لدينا:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\forall x \in ]1, 2[), \\ (\exists! \alpha \in ]1, 2[) / h(\alpha) = 0 \text{ إذن} \\ h'(x) = e^x - 2 > 0 \\ h(1) \times h(2) < 0 \end{array} \right.$$

وبالتالي للمعادلة  $[x \in \mathbb{R}, g(x) = x]$  حل وحيد في المجال  $]1, 2[$

الجزء الثاني:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}} + 1 \right) = \boxed{1} \text{ و } \boxed{D_f = \mathbb{R}} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [e^{-x} + \ln(x+1)] = \boxed{+\infty} \text{ و}$$

(2) لدينا  $f(0) = 1$  إذن

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \left( \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} [t \ln^2(t)]$$

$$= \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} [2\sqrt{t} \ln(\sqrt{t})]^2 = \boxed{0}$$

$$* \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left( \frac{f(x) - f(0)}{x} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[ \frac{e^{-x} + \ln(x+1) - 1}{x} \right]$$

$$= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \left[ -\frac{1}{e^x} \frac{e^x - 1}{x} + \frac{\ln(x+1)}{x} \right] = -1 + 1 = \boxed{0}$$

نستنتج جبريا أن f قابلة للإشتقاق في 0 وأن  $f'(0) = 0$

$$(1) \quad U_1 = g(U_0) = e^{\ln(2)} - \ln(2) - 1 \quad (U_0 = \ln(2) \text{ لأن } *) \\ = 2 - \ln(2) - 1 = \boxed{1 - \ln(2)}$$

\* بما أن  $0 < 1 - \ln(2) < \ln(2) < 1 < \alpha$  فإن  $\ln(2) < 1$  و  $1 < \alpha < 2$

$$\text{وبالتالي فإن: } \boxed{0 < U_1 < U_0 < \alpha}$$

$$(2) \quad \text{نبين بالترجع على } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ أن } 0 < U_n < \alpha$$

\*أساس التراجع:  $0 < U_0 < \alpha$  و ذلك حسب السؤال السابق

\*فرضية التراجع: ليكن  $n \in \mathbb{N}$  ، نفترض أن  $0 < U_n < \alpha$  و نبين أن:  
 $0 < U_{n+1} < \alpha$

نعلم أن  $g$  تزايدية قطعاً على  $\mathbb{R}_+$  إذن بالخصوص على  $[0, \alpha]$

وبما أن  $0 < U_n < \alpha$  فإن  $g(0) < g(U_n) < g(\alpha)$  و حيث إن  
 $g(0) = 0$  و  $g(\alpha) = \alpha$  و  $g(U_n) = U_{n+1}$  فإن  $0 < U_{n+1} < \alpha$

$$\text{*خاتمة: } \boxed{(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_n < \alpha}$$

$$(3) \quad \text{نبين بالترجع على } n \text{ أن } 0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$$

\*أساس التراجع:  $0 < U_1 < U_0 < \alpha$  و ذلك حسب السؤال (1)

\*فرضية التراجع: ليكن  $n \in \mathbb{N}$  ، نفترض أن  $0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$  و نبين أن:  
 $0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$

نعلم أن  $g$  تزايدية قطعاً على  $[0, \alpha]$  إذن نستنتج من الافتراض أن

$$g(0) < g(U_{n+1}) < g(U_n) < g(\alpha)$$

$$0 < U_{n+2} < U_{n+1} < \alpha$$

\*خاتمة:  $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < U_{n+1} < U_n < \alpha$

إذن المتتالية  $(U_n)$  تناقصية

(4) نعتبر المجال  $I = [0, \alpha]$  ، لدينا

\*  $g$  متصلة و تزايدية قطعاً على  $I$  و حيث  $g(0) = 0 / g(\alpha) = \alpha$

$$\text{فإن } g(I) = I \text{ إذن } \boxed{g(I) \subset I}$$

\*  $0 < U_0 < \alpha$  إذن  $\boxed{U_0 \in I}$

\*  $(U_n)$  تناقصية و مصغرة إذن  $(U_n)$  متقاربة

بهذه المعطيات نستنتج أن نهاية  $(U_n)$  ،  $l$  ، تحقق  $l \in I$  و  $g(l) = l$

و بما أن  $0$  و  $\alpha$  هما الحلين الوحيدين في  $I$  للمعادلة  $g(l) = l$  و

$(U_n)$  تناقصية فإن  $l = 0$

$$\text{*خاتمة: } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n) = 0}$$