درس الأعداد العقدية الجزء2:

I. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$

1) ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم حلا المعادلة. $z^2=a$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هما:

- $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ إذا كان. $a\succ 0$
- $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$ إذا كان $a\prec 0$.

مثال1 حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2=5$

$z^2=5$ يعني : $z=\sqrt{5}$ و $z=-\sqrt{5}$

ومنه : $S=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$

مثال2 : حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $z^2=-3$

$z^2=-3$ يعني $z^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2$: $z=\sqrt{3}i$ و $z=-\sqrt{3}i$

ومنه : $S=\left\{-\sqrt{3}i;\sqrt{3}i\right\}$

2) لحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة:. $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم

نحسب العدد الحقيقي $\Delta=b^2-4ac$ مميز المعادلة $az^2+bz+c=0$.

- إذا كان $\Delta>0$ فان المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما: $z=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- إذا كان $\Delta=0$ فان المعادلة تقبل حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z=-\dfrac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta<0$ فان المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و مختلفين هما: $z=\dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z'=\dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$

مثال1: لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): z^2-z+2=0$

مميز المعادلة (E) هو : .

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)=-7=\left(i\sqrt{7}\right)^2$.

حلا المعادلة (E) هما: $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ و $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ إذن: $S=\left\{\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{7}}{2};\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

مثال2: لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): z^2-z-2=0$

مميز المعادلة (E) هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(-2)=9=(3)^2$

حلا المعادلة (E) هما : $z_1=\dfrac{1-3}{2}=-1$ و $z_2=\dfrac{1+3}{2}=2$.

إذن: $S=\{-1;2\}$.

مثال3: لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E): z^2-2z+1=0$

الجواب : مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=b^2-4ac=0$

للمعادلة حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z=-\dfrac{b}{2a}=1$ إذن: . $S=\{1\}$

نتيجة: ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ $(a\neq 0)$ في المجموعة $\mathbb{C}$, لدينا: $az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$

لكل z من $\mathbb{C}$ $z_1+z_2=-\dfrac{b}{a}$ و $z_1\times z_2=\dfrac{c}{a}$

II. الترميز ألأسي لعدد عقدي غير منعدم

تعريف : كل عدد عقدي z غير منعدم, معياره r و θ عمدة له يكتب على الشكل $re^{i\theta}$ هذه الكتابة تسمى ترميزا أسيا للعدد العقدي z

مثال: ليكن: $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, لدينا: $|z|=2$ و $\arg z\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هي ترميز أسي للعدد العقدي z

خاصيات: ليكن r و r' عددين حقيقيين موجبين قطعا و θ و θ' عددين حقيقيين:

1) $\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$ 2) $-re^{i\theta}=re^{i(\theta+\pi)}$ 3) $re^{i\theta}\times r'e^{i\theta}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$

4) $\dfrac{1}{re^{i\theta}}=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ 5) $\dfrac{r'e^{i\theta}}{re^{i\theta}}=\dfrac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$ 6) $\left(re^{i\theta}\right)^n=(r)^n\, re^{in\theta}$

III. صيغتا أولير:

ليكن θ عددا حقيقيا , لدينا:

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta \quad \text{و} \quad e^{-i\theta}=\cos\theta-i\sin\theta$$

$\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ وهي صيغتا أولير

ولكل n من $\mathbb{N}$ و θ من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta) \quad \text{و} \quad e^{in\theta}-e^{-in\theta}=2i\sin(n\theta)$$

مثال: بين أن: $\cos^3\theta=\dfrac{1}{4}\cos3\theta+\dfrac{3}{4}\cos\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

أو سؤال بطريقة أخرى : قم باخطاط: $\cos^3\theta$

الجواب : ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لدينا: $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

اذن $\cos n\theta=\dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ و منه: $\cos^3\theta=\left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3+3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2+\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(e^{i\theta3}+3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos3\theta+3\times2\cos\theta\right)=\frac{1}{4}\cos3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

IV. صيغة موافر

ليكن θ عددا حقيقيا و n عنصرا من $\mathbb{N}$, لدينا:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

هذه المتساوية تسمى صيغة موافر, و تكتب أيضا: $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$