ذ. محمد الكيال

الأعداد العقدية

مجموعة الأعداد العقدية هي : $\mathbb{C} = \{z = a + ib \,/\, (a;b) \in \mathbb{R}^2$ و $i^2 = -1\}$

الكتابة الجبرية لعدد عقدي:

ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

- $a + ib$ تسمى الكتابة الجبرية للعدد العقدي z
- العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z و يرمز له بالرمز : $\operatorname{Re}(z)$
- العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z و يرمز له بالرمز : $\operatorname{Im}(z)$

حالتان خاصتان:

- إذا كان : $\operatorname{Im}(z) = 0$ فإن z هو عدد حقيقي
- إذا كان : $\operatorname{Re}(z) = 0$ و $\operatorname{Im}(z) \neq 0$ فإن z يسمى عددا تخيليا صرفا

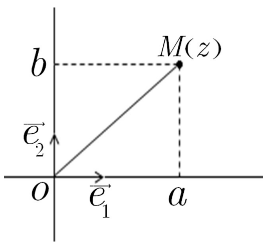
تساوي عددين عقديين:

ليكن z و z' عددين عقديين

$z = z' \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z')$ و $\operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z')$

التمثيل المبياني لعدد عقدي:

ليكن المستوى العقدي منسوبا إلى معلم متعامد ممنظم $(o, \vec{e_1}, \vec{e_2})$

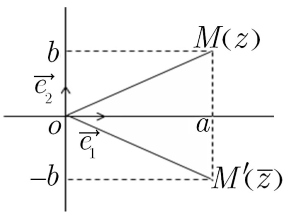


ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

نربط العدد العقدي z بالنقطة $M(a,b)$

- العدد z يسمى لحق النقطة M و النقطة M تسمى صورة العدد z و نكتب : $M(z)$
- العدد z يسمى كذلك لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$ و نكتب : $\overrightarrow{OM}(z)$ أو $z = Aff\left(\overrightarrow{OM}\right)$

مرافق عدد عقدي:



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

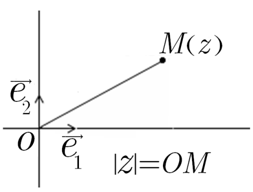
مرافق العدد z هو العدد العقدي : $\overline{z} = a - ib$

$M(z)$ و $M'(\overline{z})$ متماثلان بالنسبة للمحور الحقيقي

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}$
- $\overline{z^n} = \overline{z}^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$
- $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}} \quad (z' \neq 0)$

- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z$ عدد حقيقي
- $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z$ عدد تخيلي صرف
- $z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z)$
- $z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$
- $z\overline{z} = [\operatorname{Re}(z)]^2 + [\operatorname{Im}(z)]^2$

معيار عدد عقدي:



ليكن $z = a + ib$ عددا عقديا حيث : $(a;b) \in \mathbb{R}^2$

معيار العدد العقدي z هو العدد الحقيقي الموجب : $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\left\|z^n\right\| = \|z\|^n \quad \left(n \in \mathbb{N}^*\right)$	$\left\|z \times z'\right\| = \|z\| \times \left\|z'\right\|$
$\|-z\| = \|z\|$	$\left\|\overline{z}\right\| = \|z\|$
$\left\|\dfrac{z}{z'}\right\| = \dfrac{\|z\|}{\|z'\|} \quad (z' \neq 0)$	$\left\|\dfrac{1}{z'}\right\| = \dfrac{1}{\|z'\|}$

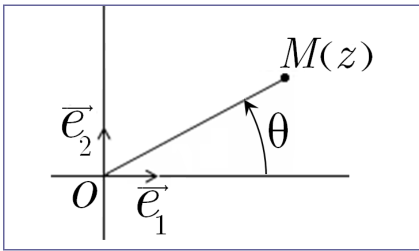
➥ الشكل المثلثي و الكتابة الأسية لعدد عقدي غير منعدم:

ليكن z عددا عقديا غير منعدم صورته M

عمدة العدد العقدي z هو θ أحد قياسات الزاوية الموجهة : $\left(\widehat{\vec{e_1}, \overrightarrow{OM}}\right)$

و نرمز له بالرمز : $\arg z$

ونكتب : $\arg z = \theta\,[2\pi]$



ليكن z عددا عقديا غير منعدم

نضع $r = |z|$ و $\arg z = \theta\,[2\pi]$

- الشكل المثلثي للعدد العقدي z هو : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = [r,\theta]$
- الكتابة الأسية للعدد العقدي z هي : $z = re^{i\theta}$

حالات خاصة:

الكتابة المثلثية لعدد حقيقي a غير منعدم

$a > 0$	$a < 0$
$a = [a, 0]$	$a = [-a, \pi]$
$ai = \left[a, +\dfrac{\pi}{2}\right]$	$ai = \left[-a, -\dfrac{\pi}{2}\right]$

- $\arg(zz') \equiv (\arg z + \arg z')[2\pi]$
- $\arg \overline{z} \equiv -\arg z\,[2\pi]$
- $-\arg z \equiv (\pi + \arg z)[2\pi]$
- $\arg z^n \equiv n\arg z \quad [2\pi]$
- $\arg \dfrac{1}{z} \equiv -\arg z \quad [2\pi]$
- $\arg \dfrac{z}{z'} \equiv (\arg z - \arg z') \quad [2\pi]$

- $[r,\theta] \times [r',\theta'] = [rr';\theta + \theta']$
- $\overline{[r,\theta]} = [r,-\theta]$
- $-[r,\theta] = [r,\pi + \theta]$
- $[r,\theta]^n = [r^n; n\theta]$
- $\dfrac{1}{[r';\theta']} = \left[\dfrac{1}{r'};-\theta'\right]$
- $\dfrac{[r;\theta]}{[r';\theta']} = \left[\dfrac{r}{r'};\theta - \theta'\right]$

- $re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = rr'e^{i(\theta+\theta')}$
- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $-re^{i\theta} = re^{i(\pi+\theta)}$
- $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$
- $\dfrac{1}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{1}{r'}e^{-i\theta'}$
- $\dfrac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = \dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$

$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [r,\theta + 2k\pi] = [r,\theta]$

- z عدد حقيقي $\Leftrightarrow \arg z = k\pi$
- z عدد تخيلي صرف $\Leftrightarrow \arg z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

➥ صيغة موافر:

$\forall n \in \mathbb{N}$

$(\cos\theta + i\sin n\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

➥ صيغتا أولير:

$\forall \theta \in \mathbb{R} \qquad \cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$ و $\sin\theta = \dfrac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

➥ حل المعادلة $z^2 = a$ $\quad z \in \mathbb{C}$ حيث $(a \in \mathbb{R})$:

المعادلة :		مجموعة حلول المعادلة :
$z \in \mathbb{C} \quad z^2 = a$	$a > 0$	$S = \{-\sqrt{a};\sqrt{a}\}$
	$a = 0$	$S = \{0\}$
	$a < 0$	$S = \{-i\sqrt{-a}; i\sqrt{-a}\}$

حل المعادلة: $az^2+bz+c=0$ $z\in\mathbb{C}$ حيث: a و b و c أعداد حقيقية $(a\neq 0)$

مجموعة حلول المعادلة:		المعادلة:
$S=\left\{\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a};\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$	$\Delta>0$	$z\in\mathbb{C}\quad az^2+bz+c=0$ $\left(\Delta=b^2-4ac\right)$
$S=\left\{\dfrac{-b}{2a}\right\}$	$\Delta=0$	
$S=\left\{\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a};\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$	$\Delta<0$	

مفاهيم هندسية و مصطلحات الأعداد العقدية:

العلاقة العقدية	المفهوم الهندسي
$AB=\left\|z_B-z_A\right\|$	المسافة AB
$z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$	I منتصف القطعة $[A;B]$
$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)\equiv\arg\left(\dfrac{z_c-z_A}{z_B-z_A}\right)[2\pi]$	قياس الزاوية $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$
$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\in\mathbb{R}$	A و B و C نقط مستقيمية
$\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\dfrac{z_D-z_C}{z_B-z_C}\in\mathbb{R}$ أو $\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\times\dfrac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\in\mathbb{R}$	A و B و C و D نقط متداورة

المفهوم الهندسي	العلاقة العقدية
• $AM=r$ • M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها A و شعاعها r	$\left\|z-z_A\right\|=r$ $(r>0)$
• $AM=BM$ • M تنتمي إلى واسط $[AB]$	$\left\|z-z_A\right\|=\left\|z-z_B\right\|$
ABC مثلث قائم الزاوية في A	$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[r;\pm\dfrac{\pi}{2}\right]$
ABC مثلث متساوي الساقين في A	$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=[1;\theta]$
ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في A	$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\dfrac{\pi}{2}\right]$
ABC مثلث متساوي الأضلاع	$\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\left[1;\pm\dfrac{\pi}{3}\right]$

تمثيلات عقدية لبعض التحويلات الاعتيادية:

تمثيله العقدي هو:	التحويل
$z'=z+b$ حيث b لحق المتجهة $\vec{u}$	الإزاحة t ذات المتجهة $\vec{u}$
$z'-\omega=k(z-\omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω	التحاكي h الذي مركزه Ω و نسبته k
$z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)$ حيث ω لحق النقطة Ω	الدوران r الذي مركزه Ω و زاويته θ