مستوى: السنة الثانية من سلك الباكالوريا
شعبة العلوم التجريبية
- **مسلك علوم الحياة و الأرض**
- **مسلك العلوم الفيزيائية**
- **مسلك العلوم الزراعية**

مذكرة رقم 11 في درس الأعداد العقدية(ب)

القدرات المنتظرة
- **التعرف على الصيغ المثلثية الأساسية باستعمال الأعداد العقدية**
- **إخطاط حدانيات مثلثية باستعمال الترميز الأسي لعدد عقدي**
- **تطبيق الأعداد العقدية في حل مسائل هندسية**
- **حل المعادلة : $ax^2+bx+c=0$ في $\mathbb{C}$** $\left((a;b;c)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\right)$

محتوى الدرس
- **المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$**
- **الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم وخاصياته**
- **صيغتا أولير وتطبيقاتها**
- **صيغة موافر وتطبيقاتها**

I. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد في المجموعة $\mathbb{C}$

1) المعادلة: $z^2=a$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$

خاصية : ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم حلا المعادلة. $z^2=a$ في المجموعة $\mathbb{C}$ هما:
- $\sqrt{a}$ و $-\sqrt{a}$ إذا كان. $a\succ 0$
- $i\sqrt{-a}$ و $-i\sqrt{-a}$ إذا كان $a\prec 0$.

أمثلة : حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلات التالية: 1) $z^2=5$ 2) $z^2=-3$

أجوبة : 1) $z^2=5$ يعني : $z=\sqrt{5}$ و $z=-\sqrt{5}$

ومنه : $S=\left\{-\sqrt{5};\sqrt{5}\right\}$

2) $z^2=-3$ يعني $z^2=\left(\sqrt{3}i\right)^2$: $z=\sqrt{3}i$ و $z=-\sqrt{3}i$

ومنه : $S=\left\{-\sqrt{3}i;\sqrt{3}i\right\}$

2) المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم

تعريف: نسمي معادلة من الدرجة الثانية في المجموعة $\mathbb{C}$ بمعاملات حقيقية كل معادلة تكتب على الشكل $az^2+bz+c=0$, حيث z هو المجهول, و a و b و c أعداد حقيقية, و a غير منعدم

خاصية: نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة:. $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم

العدد الحقيقي $\Delta=b^2-4ac$, يسمى مميز المعادلة $az^2+bz+c=0$.

- إذا كان $\Delta>0$ فان المعادلة تقبل حلين حقيقيين هما:
$z=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z'=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
- إذا كان $\Delta=0$ فان المعادلة تقبل حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z=-\dfrac{b}{2a}$
- إذا كان $\Delta<0$ فان المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين و مختلفين هما: $z=\dfrac{-b-i\sqrt{\Delta}}{2a}$ و $z'=\dfrac{-b+i\sqrt{\Delta}}{2a}$

مثال1: لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):z^2-z+2=0$

مميز المعادلة (E) هو : .

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(2)=-7=\left(i\sqrt{7}\right)^2$.

حلا المعادلة (E) هما: $z_1=\dfrac{1+i\sqrt{7}}{2}=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$ و $z_2=\overline{z_1}=\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{7}}{2}$.

إذن: $S=\left\{\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{7}}{2};\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right\}$

مثال2: لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):z^2-z-2=0$

مميز المعادلة (E) هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-1)^2-4(-2)=9=(3)^2$

حلا المعادلة (E) هما : $z_1=\dfrac{1-3}{2}=-1$ و $z_2=\dfrac{1+3}{2}=2$.

إذن: . $S=\{-1;2\}$

مثال3: لنحل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E):z^2-2z+1=0$

الجواب: مميز المعادلة (E) هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4=0$

للمعادلة حلا حقيقيا مزدوجا هو: $z=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2}=1$ إذن: .

$S=\{1\}$

3) نتائج : ليكن z_1 و z_2 حلي المعادلة $az^2+bz+c=0$ $(a\neq 0)$ في المجموعة $\mathbb{C}$, لدينا:

$az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)$ لكل z من $\mathbb{C}$

$z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ و $z_1\times z_2=\frac{c}{a}$

مثال: لكل z من $\mathbb{C}$, نضع: $P(z)=z^2-2z+2$

1. أحسب $P(1-i)$
2. استنتج حلول المعادلة $P(z)=0$

الجواب : 1)

$P(1-i)=(1-i)^2-2(1-i)+2=-2i-2+2i+2=0$

وبالتالي : $z_1=1-i$ جذر للحدودية العقدية $P(z)$

ونعلم أن : اذن $z_1+z_2=-\frac{b}{a}$ أي $1-i+z_2=-\frac{-2}{1}$

أي : $z_2=2+i-1=1+i$ ومنه : $S=\{1-i;1+i\}$

تمرين1 : حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلتين التاليتين:

1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ 2) $z^2-6z+13=0$

الجواب : 1) $(z^2+9)(z^2-4)=0$ يعني $z^2-4=0$ أو $z^2+9=0$

يعني $z^2=4$ أو $z^2=-9$ يعني $z=\sqrt{4}$ أو $z=-\sqrt{4}$ أو $z=\sqrt{9}i$ أو $z=-\sqrt{9}i$

يعني $z=2$ أو $z=-2$ أو $z=3i$ أو $z=-3i$

ومنه : $S=\{-3i;3i;-2;2\}$

2) مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-6)^2-4(13)=36-52=(4i)^2$.

حلا المعادلة (E) هما: $z_1=\frac{6+4i}{2}=3+2i$ و

$z_2=\overline{z_1}=3-2i$.

إذن: $S=\{3-2i;3+2i\}$

تمرين2 : 1) حل في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2-8z+17=0$.

2) نعتبر في مجموعة الأعداد العقدية $\mathbb{C}$ الحدودية $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.

أ. بين أن الحدودية $P(z)$ تقبل حلا تخيليا صرفا وحيدا .

ب. حدد الأعداد الحقيقية a ; b ; c حيث :

$P(z)=(z+i)(az^2+bz+c)$.

ج. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

أجوبة : 1) $z^2-8z+17=0$

مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=(-8)^2-4(17)=64-68=(2i)^2$.

حلا المعادلة (E) هما: $z_1=\frac{8+2i}{2}=4+i$ و

$z_2=\overline{z_1}=4-i$.

إذن: $S=\{4-i;4+i\}$

2)أ) ليكن : $z_0=bi$ حلا تخيليا صرفا للمعادلة.

لدينا اذن : $z_0{}^3+(-8+i)z_0{}^2+(17-8i)z_0+17i=0$

يعني : $(bi)^3+(-8+i)(bi)^2+(17-8i)(bi)+17i=0$

يعني : $-ib^3-(-8+i)b^2+17bi+8b+17i=0$

يعني : $-ib^3+8b^2-ib^2+17bi+8b+17i=0$

يعني : $8b^2+8b+i(-b^3-b^2+17b+17)=0$

يعني : $\begin{cases}8b^2+8b=0\\-b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}8b(b+1)=0\\-b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}$

يعني : $\begin{cases}b=0\ ou\ b=-1\\-b^3-b^2+17b+17=0\end{cases}$

$b=0$ لا يحقق المعادلة الثانية لأن : $-0^3-0^2+170+17\neq 0$

$b=-1$ يحقق المعادلة الثانية لأن :

$-(-1)^3-(-1)^2+17(-1)+17=0$

ومنه $b=-1$ اذن : $z_0=(-1)i=-i$ حل تخيلي صرف للمعادلة.

2)ب) $(z+i)(az^2+bz+c)=az^3+bz^2+cz+aiz^2+biz+ci$

$P(z)=az^3+(b+ai)z^2+(c+bi)z+ci$

بالمقارنة مع $P(z)=z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$

نجد أن : $\begin{cases}a=1\\b+ai=-8+i\\c+bi=17-8i\\ci=17i\end{cases}$ يعني : $\begin{cases}a=1\\b=-8\\c-8i=17-8i\\c=17\end{cases}$

ومنه : $a=1$ و $b=-8$ و $c=17$ وبالتالي الكتابة الجديدة ل $P(z)$

هي : $P(z)=(z+i)(z^2-8z+17)$

2)ج) $P(z)=0$ يعني $(z+i)(z^2-8z+17)=0$

يعني $z^2-8z+17=0$ أو $z+i=0$

يعني $z_1=4+i$ أو $z_2=4-i$ أو $z_0=-i$

وبالتالي : $S=\{4-i;4+i;-i\}$

تمرين3 : نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$, المعادلة:

$(E):z^3+2(\sqrt{3}-1)z^2+4(1-\sqrt{3})z-8=0$

1. بين أن العدد 2 حل للمعادلة (E)

2. بين أن لكل z من $\mathbb{C}$, لدينا:

$$z^3+2\left(\sqrt{3}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{3}\right)z-8=\left(z-2\right)\left(z^2+2\sqrt{3}z+4\right)$$

3. حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $P(z)=0$.

أجوبة : 1)

$$2^3+2\left(\sqrt{3}-1\right)2^2+4\left(1-\sqrt{3}\right)2-8=8+8\left(\sqrt{3}-1\right)8+8\left(1-\sqrt{3}\right)-8$$

$$=8+8\sqrt{3}-8+8-8\sqrt{3}-8=0$$

ومنه : العدد 2 حل للمعادلة (E)

2) $$\left(z-2\right)\left(z^2+2\sqrt{3}z+4\right)=z^3+2\sqrt{3}z^2+4z-2z^2-4\sqrt{3}z-8$$

$$=z^3+2\left(\sqrt{3}-1\right)z^2+4\left(1-\sqrt{3}\right)z-8$$

3) $P(z)=0$ يعني $\left(z-2\right)\left(z^2+2\sqrt{3}z+4\right)=0$

يعني $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$ أو $z-2=0$

يعني $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$ أو $z=2$

نحل المعادلة : $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$

مميز المعادلة هو :

$\Delta=b^2-4ac=\left(2\sqrt{3}\right)^2-4(4)=12-16=(2i)^2$.

حلا المعادلة $z^2+2\sqrt{3}z+4=0$

هما: $z_1=\dfrac{2\sqrt{3}+2i}{2}=\sqrt{3}+i$ و $z_2=\overline{z_1}=\sqrt{3}-i$.

إذن: مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $S=\left\{\sqrt{3}-i;\sqrt{3}+i;2\right\}$

II. الترميز الأسي لعدد عقدي غير منعدم

تعريف : كل عدد عقدي z غير منعدم, معياره r و θ عمدة له يكتب على الشكل $re^{i\theta}$ هذه الكتابة تسمى ترميزا أسيا للعدد العقدي z

مثال: ليكن: $z=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$, لدينا: $|z|=2$ و $\arg z\equiv\dfrac{\pi}{4}[2\pi]$

إذن $z=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ هي ترميز أسي للعدد العقدي z

خاصيات: ليكن r و r' عددين حقيقيين موجبين قطعا و θ و θ' عددين حقيقيين

1) $\overline{re^{i\theta}}=re^{-i\theta}$ (2 $-re^{i\theta}=re^{i(\theta+\pi)}$ (3 $re^{i\theta}\times r'e^{i\theta}=rr'e^{i(\theta+\theta')}$

4) $\dfrac{1}{re^{i\theta}}=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ (5 $\dfrac{r'e^{i\theta}}{re^{i\theta}}=\dfrac{r'}{r}e^{i(\theta'-\theta)}$ (6 $\left(re^{i\theta}\right)^n=\left(r\right)^n re^{in\theta}$

مثال أو تمرين4 : أعط شكلا أسيا لكل عدد من الأعداد التالية:

1) $z_1=2+2i$ (2 $z_2=1-i\sqrt{3}$ (3 $z_1\times z_2$

4) $\dfrac{z_1}{z_2}$ (5 $\left(z_2\right)^{12}$

أجوبة : 1) $z_1=2+2i$ لدينا: $|z_1|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$$2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

ومنه : $z_1=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

2) $z_2=1-i\sqrt{3}$ لدينا: $|z_2|=\sqrt{(1)^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{4}=2$

$$1-i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

ونستعمل : القاعدة التالية : $\cos(-x)=\cos x$ و $\sin(-x)=-\sin x$

اذن : $z_2=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ ومنه : $z_2=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$

3) $$z_1\times z_2=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\times 2e^{-i\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{\pi}{3}}=4\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{12}}$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{-i\frac{\pi}{3}}}=\frac{2\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}-\left(-i\frac{\pi}{3}\right)}=2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}+i\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\left(z_2\right)^{12}=\left(2e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)^{12}=2e^{-i12\frac{\pi}{3}}=2e^{-4i\pi}$$

III. صيغتا أولير

خاصية: ليكن θ عددا حقيقيا , لدينا: $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ و

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

مثال1: لنبين أن: $\cos^2\theta=\dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لدينا: $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ اذن

$\cos n\theta=\dfrac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$ و منه:

$$\cos^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2+2e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2\right)=\frac{1}{4}\left(\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)+2\right).$$

$$=\frac{1}{4}\left(2\cos 2\theta+2\right)=\frac{\cos 2\theta+1}{2}$$

تمرين5 : بين أن: $\sin^2\theta=\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لدينا: $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ اذن

$\sin n\theta=\dfrac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ و منه:

$$\sin^2\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^2=-\frac{1}{4}\left(\left(e^{i\theta}\right)^2-2e^{i\theta}\cdot e^{-i\theta}+\left(e^{-i\theta}\right)^2\right)=-\frac{1}{4}\left(\left(e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}\right)-2\right).$$

$$=-\frac{1}{4}\left(2\cos 2\theta-2\right)=\frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

ملحوظة: لكل n من $\mathbb{N}$ و θ من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$e^{in\theta}+e^{-in\theta}=2\cos(n\theta)\ \text{و}\ e^{in\theta}-e^{-in\theta}=2i\sin(n\theta)$$

تمرين6 : بين أن: $\cos^3\theta=\dfrac{1}{4}\cos 3\theta+\dfrac{3}{4}\cos\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لدينا: $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ اذن

$$\cos n\theta=\frac{e^{in\theta}+e^{-in\theta}}{2}$$

و منه:

$$\cos^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3+3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2+\left(e^{-i\theta}\right)^3\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(e^{i\theta 3}+3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}+e^{-i3\theta}\right)$$

$$\cos^3\theta=\frac{1}{8}\left(\left(e^{i\theta 3}+e^{-i3\theta}\right)+3\left(e^{i\theta}+e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(2\cos 3\theta+3\times 2\cos\theta\right)=\frac{1}{4}\cos 3\theta+\frac{3}{4}\cos\theta$$

تمرين 7 : بين أن: $\sin^3\theta=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : ليكن $\theta\in\mathbb{R}$ لدينا: $\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ اذن

$\sin n\theta=\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2i}$ و منه:

$$\sin^3\theta=\left(\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}\right)^3=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta}\right)^3-3\left(e^{i\theta}\right)^2\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot\left(e^{-i\theta}\right)^2-\left(e^{-i\theta}\right)^3\right).$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(e^{i\theta 3}-3e^{i2\theta}\cdot e^{-i\theta}+3e^{i\theta}\cdot e^{-i2\theta}-e^{-i3\theta}\right)$$

$$\sin^3\theta=-\frac{1}{8i}\left(\left(e^{i\theta 3}-e^{-i3\theta}\right)-3\left(e^{i\theta}-e^{-i\theta}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{8i}\left(2i\sin 3\theta-3\times 2i\sin\theta\right)=-\frac{1}{4}\sin 3\theta+\frac{3}{4}\sin\theta$$

تمرين8: بين أن: $\sin^4\theta=\frac{1}{8}\cos 4\theta-\frac{1}{2}\cos 2\theta+\frac{3}{8}$ لكل θ من $\mathbb{R}$

IV. صيغة موافر

خاصية: ليكن θ عددا حقيقيا و n عنصرا من $\mathbb{N}$, لدينا:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^n=\cos\left(n\theta\right)+i\sin\left(n\theta\right)$$

هذه المتساوية تسمى صيغة موافر, و تكتب أيضا: $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$

مثال1: لنبين أن: $\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ و $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : لدينا حسب صيغة موافر:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$$

و لدينا أيضا:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta$$

و منه: $\cos^2\theta-\sin^2\theta+2i\sin\theta\cos\theta=\cos 2\theta+i\sin 2\theta$

إذن: $\sin 2\theta=2\cos\theta\sin\theta$ و $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

(حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

تمرين9: بين باستعمال صيغة موافر أن:

$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

و أن: $\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ لكل θ من $\mathbb{R}$

الجواب : لدينا حسب صيغة موافر:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^3=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

و لدينا أيضا:

$$\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)^3=\cos^3\theta+3\left(\cos\theta\right)^2 i\sin\theta+3\cos\theta\left(i\sin\theta\right)^2+\left(i\sin\theta\right)^3$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)$$

و منه:

$$\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta+i\left(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\right)=\cos 3\theta+i\sin 3\theta$$

إذن: $\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$

و $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$ (حسب خاصية تساوي عددين عقديين)

$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$$

$$=\cos^3\theta-3\cos\theta\left(1-\cos^2\theta\right)$$

$$\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta+3\cos^3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

$$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta=3\left(1-\sin^2\theta\right)\sin\theta-\sin^3\theta$$

$$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$$

تمرين10: حل في $\mathbb{C}$: **1-** $2Z^2-2Z+5=0$ **-2** $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

الأجوبة: 1- حل المعادلة : $2Z^2-2Z+5=0$

لدينا : $\Delta=-36$ $z_1=\frac{2-i\sqrt{36}}{4}$; $z_2=\frac{2+i\sqrt{36}}{4}$

إذن : $\boxed{S=\left\{\frac{1-3i}{2}\ ;\ \frac{1+3i}{2}\right\}}$

-2 $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

نلاحظ أن : 1 **يعدم** $3Z^3-3Z^2+2Z-2$

و منه : $z-1$ **يقسم** $3Z^3-3Z^2+2Z-2$

نجد : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=\left(Z-1\right)\left(3Z^2+2\right)$

حل المعادلة : $3Z^2+2=0$

إذن : $Z^2=-\frac{2}{3}$ $Z=i\sqrt{\frac{2}{3}}$ **أو** $Z=-i\sqrt{\frac{2}{3}}$

ومنه : $3Z^3-3Z^2+2Z-2=0$

يعني : $Z=1$ **أو** $Z=i\sqrt{\frac{2}{3}}$ **أو** $Z=-i\sqrt{\frac{2}{3}}$

إذن : $\boxed{S=\left\{1;i\sqrt{\frac{2}{3}};-i\sqrt{\frac{2}{3}}\right\}}$

تمرين11: $P(Z)=Z^3-\left(16-i\right)Z^2+\left(89-16i\right)Z+89i$

1)بين أن $\left(E\right):P(Z)=0$ **تقبل حلا تخيليا صرفا** z_0 **يجب تحديده**

2) حل في $\mathbb{C}$ **:** $P(Z)=0$

الأجوبة: 1)لنبين أن $P(Z)=0$ **تقبل حلا تخيليا صرفا**

نعتبر : $z_0=ib$

$$P(z_0)=0\Leftrightarrow(ib)^3-(16-i)(ib)^2+(89-16i)ib+89i=0$$

$$\Leftrightarrow 16b^2+16b+i\left(-b^3-b^2+89b+89\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}16b^2+16b=0\\-b^3-b^2+89b+89=0\end{cases}$$

$$\boxed{P(z_0)=0\Leftrightarrow b=-1}$$

و منه : $P(Z)=0$ **تقبل حلا تخيليا صرفا** $z_0=-i$

2) حل المعادلة $P(Z)=0$ **في** $\mathbb{C}$ **:**

بما أن : $-i$ **جدر ل** $P\left(Z\right)$ **فإن :**

$$P(Z)=(z+i)(z^2+\alpha z+\beta)$$
$$P(Z)=z^3+(i+\alpha)z^2+(\alpha i+\beta)z+\beta i$$
و بما أن : $P(Z)=Z^3-(16-i)Z^2+(89-16i)Z+89i$

فإن : $\boxed{\alpha=-16}$ و $\boxed{\beta=89}$

و منه : $P(Z)=(z+i)(z^2-16z+89)$

حل المعادلة : $z^2-16z+89=0$

نجد : $\Delta=-100$ ومنه $z=8-5i$ او $z=8+5i$

إذن: مجموعة حلول المعادلة (E) هي: $S=\{-i;8-5i;8+5i\}$

<u>تمرين12:</u> نعتبر : $z=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

1) أ)حدد الشكل الأسى ل z ب)حدد الشكل الجبري ل z

2) استنتج $\cos\dfrac{11\pi}{12}$ و $\sin\dfrac{11\pi}{12}$

<u>الأجوبة:</u> **1)** أ)تحديد الشكل الأسى : $z=-\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}$

$$z=e^{-i\pi}\frac{2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2e^{i\frac{\pi}{4}}}=e^{i\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}-\pi}=e^{-i\frac{11\pi}{12}}$$

ب)تحديد الشكل الجبري:

$$z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}=-\frac{(1+i\sqrt{3})(\sqrt{2}-i\sqrt{2})}{4}=-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}$$

$$\boxed{z=\frac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}+i\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}}$$

2) من أ) و ب) : $\cos\dfrac{-11\pi}{12}=-\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}$ و $\sin\dfrac{-11\pi}{12}=\dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4}$

إذن $\boxed{\cos\dfrac{11\pi}{12}=-\dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{4}}$ $\boxed{\sin\dfrac{11\pi}{12}=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{4}}$