

الأستاذ:  
نجيب  
عثماني

سلسلة 7: الأعداد العقدية " الجزء الأول"  
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة  
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية  
الجهة  
الشرقية

$$z_5 = -4 \text{ و } z_4 = -2i \text{ و } z_3 = 3 - 4i$$

**تمرين 10:** نعتبر في المستوى العقدي  $(o; i, j)$  النقط  $C, B, A$

ألحاقهم على التوالي:  $z_A = 2$  و  $z_B = 1 + \sqrt{3}i$  و  $z_C = 3 + i\sqrt{3}$   
بين أن المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع.

**تمرين 11:** حدد معيار كل من الأعداد العقدية التالية:

$$z_3 = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^3 \text{ و } z_2 = (1+i)(\sqrt{3}-i) \text{ و } z_1 = 5(1+i\sqrt{3})$$

**تمرين 12:** تحديد  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث:

$$|z-1-2i| = |z-7+2i|$$

**تمرين 13:** تحديد  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث:

$$|z-2i|=3$$

**تمرين 14:** نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  و  $F$  التي ألحقها على التوالي:

$$z_D = 3i \text{ و } z_C = 2 + 2i \text{ و } z_B = -2i \text{ و } z_A = 2$$

$$z_F = -2 + 2i \text{ و } z_E = -3$$

أنشئ النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  و  $E$  و  $F$  باستعمال التمثيل في المستوى العقدي حدد عمدة كل عدد من

الأعداد العقدية  $z_A$  و  $z_B$  و  $z_C$  و  $z_D$  و  $z_E$  و  $z_F$

**تمرين 15:** حدد عمدة العدد العقدي  $z$  في كل حالة من

الحالات التالية:  $z_1 = 5i$  و  $z_2 = -1$ .

$$z_4 = 2 \text{ و } z_3 = -3i$$

**تمرين 16:** حدد شكلا مثلثيا للأعداد العقدية التالية

$$z_4 = -1 - \sqrt{3}i \text{ و } z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{2}i \text{ و } z_2 = 1 - i \text{ و } z_1 = 1 + i\sqrt{3}$$

**تمرين 17:** حدد شكلا مثلثيا لكل من الأعداد العقدية التالية:

$$z_2 = -2 + 2i \text{ و } z_1 = \sqrt{3} + 3i$$

$$z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2} \text{ و } z_3 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

**تمرين 18:** نعتبر العددين العقديين  $z_1 = \sqrt{3} - i$  و  $z_2 = 1 - i$  و  $Z = \frac{z_1}{z_2}$

1. أعط شكلا مثلثيا لكل من  $z_1$  و  $z_2$  و  $Z$ .

2. أكتب  $Z$  على الشكل الجبري ثم استنتج  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$ .

**تمرين 19:** نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي ألحقها على التوالي هي:

$$z_C = 7 + 3i \text{ و } z_B = 3 - 5i \text{ و } z_A = 3 + 5i$$

**تمرين 1:** أكتب الأعداد العقدية التالية على شكلهم الجبري أو الديكارتية:

$$z_2 = (1+i\sqrt{3})^3 \text{ و } z_1 = (2+i)(-1+i) + (1+2i)^2$$

$$z_5 = (1+i)^{10} \text{ و } z_4 = \frac{1+i}{3-i} \text{ و } z_3 = \frac{1-3i}{3-i}$$

**تمرين 2:** نعتبر في المستوى العقدي النقط  $A(-2; 1)$  و  $B(-3; -1)$

$$\text{و } C\left(\frac{1}{2}; -2\right)$$

ما ألحق النقط  $A$  و  $B$  و  $C$ ؟

**تمرين 3:** نعتبر في المستوى العقدي النقط  $A, B, C, D, E$

ألحاقهم على التوالي:  $z_A = 1 + i$  و  $z_B = 3 + 2i$

$$z_E = 2 \text{ و } z_D = -2i \text{ و } z_C = 2 - i$$

1. مثل النقط  $A, B, C, D, E$  في المستوى العقدي

2. حدد  $z_I$  لحق النقط  $I$  منتصف القطعة  $[AB]$

3. حدد  $z_{\overline{AB}}$  لحق المتجهة  $\overline{AB}$

4. بين أن الرباعي  $ABCD$  متوازي الأضلاع

**تمرين 4:** نعتبر النقط:  $A(1+i)$  و  $B\left(\frac{1}{2}+2i\right)$  و  $C(-1-i)$

هل النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمية؟

**تمرين 5:** حدد مرافق الأعداد العقدية التالية:  $z_1 = 5 - 2i$  و

$$z_4 = 2i \text{ و } z_3 = -5 - 3i \text{ و } z_2 = 3 + 2i$$

$$z_6 = -5 - 3i + i(2-i) \text{ و } z_5 = -7$$

**تمرين 6:** ليكن  $z$  عددا عقديا.

حدد وأكتب بدلالة  $\bar{z}$  مرافقات الأعداد العقدية التالية:

$$Z_1 = (2+i)(5-i) \text{ و } Z_2 = 2z + 5i \text{ و } Z_3 = \frac{z-1}{-3z+i}$$

**تمرين 7:** حل في المجموعة  $C$  المعادلتين:

$$1. 2z + i\bar{z} = 5 - 4i$$

$$2. z = 2\bar{z} - 2 + 6i$$

**تمرين 8:** نعتبر في المستوى العقدي العدد العقدي  $U$

ولتكن  $M$  صورة العدد العقدي  $z$  ونضع:  $U = (z-2i)(\bar{z}-1)$

نضع:  $z = x + yi$  حيث  $x \in \mathbb{R}$  و  $y \in \mathbb{R}$

1) حدد بدلالة  $x$  و  $y$  الجزء الحقيقي والتخيلي للعدد العقدي  $U$

2) حدد مجموعة النقط  $M$  ذات اللوح  $z$  بحيث يكون:

أ)  $U$  عددا حقيقيا

ب)  $U$  عددا تخيلي صرف

**تمرين 9:** حدد معيار الأعداد العقدية التالية:  $z_1 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  و

$$z_2 = -\sqrt{2} - i$$

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = 2i \text{ : بين أن (1)}$$

(2) استنتج أن المثلث  $ABC$  قائم الزاوية وأن  $BC=2AC$   
**تمرين 20:** في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  
 نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي أحاقها على التوالي هي  
 $z_C = 7+3i$  ;  $z_B = 3-5i$  ;  $z_A = 3+5i$ :

وليكن  $z$  لحق النقطة  $M$  و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة النقطة  $M$   
 بالإزاحة  $T$  ذات المتجهة  $\vec{u}$  التي لحقها  $4-2i$

1. بين أن :  $z' = z + 4 - 2i$  وتسمى الكتابة العقدية للإزاحة
2. تحقق أن النقطة  $C$  هي صورة النقطة  $A$  بالإزاحة  $T$
3. حدد لحق النقطة  $B'$  صورة النقطة  $B$  بالإزاحة  $T$

**تمرين 21:** نعتبر التحاكي  $h$  الذي مركزه  $\Omega(3; -2)$

ونسبته  $k=4$

وليكن  $z$  لحق النقطة  $M$  و  $z'$  لحق النقطة  $M'$  صورة النقطة  $M$   
 بالتحاكي  $h$  ونعتبر النقطة  $A$  التي لحقها  $z_A = 3 + 5i$

1. بين أن :  $z' = 4z - 9 + 6i$  وتسمى الكتابة العقدية للتحاكي
2. حدد لحق النقطة  $A'$  صورة النقطة  $A$  بالتحاكي  $h$

**تمرين 22:** في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم  
 ومباشر  $(o; \vec{i}, \vec{j})$

نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  التي لحقهما على التوالي  
 هي :  $z_B = 4+8i$  ;  $z_A = 7+2i$

وليكن  $z$  لحق النقطة  $M$  و  $z'$  لحق النقطة  $M'$

صورة النقطة  $M$  بالدوران  $r$  الذي مركزه  $B$  وزاويته  $\frac{\pi}{2}$

1. بين أن :  $z' = iz + 4i + 12$  وتسمى الكتابة العقدية  
 للدوران  $r$
2. بين أن لحق النقطة  $C$  صورة النقطة  $A$  بالدوران  $r$  هو

$$z_C = 10+11i$$

**تمرين 23:** نضع :  $U = (\bar{z} - i)(\bar{z} + iz)$

حدد و أرسم  $(E)$  مجموعة النقط  $M(z)$  من المستوى العقدي بحيث  
 يكون  $U$  عددا حقيقيا

**تمرين 24:** حدد هندسيا مجموعة النقط  $M$  ذات اللوح  $z$  بحيث يكون

$$\frac{z+2i}{z-4i} \text{ عددا حقيقيا.}$$

**تمرين 25:** حدد مجموعة النقط  $M$  ذات اللوح  $z$  بحيث يكون.

$$Z = z^2 - \bar{z} \text{ عددا حقيقيا}$$

**تمرين 26:** لتكن  $(C)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث:

$$|z-1+2i|=1$$

و  $(\Delta)$  مجموعة النقط  $M$  التي لحقها  $z$  بحيث :  $|z| = |\bar{z}-1+2i|$  حدد

و أنشئ المجموعتين  $(C)$  و  $(\Delta)$ .

**تمرين 27:** حدد معيار وعمدة كل من الأعداد العقدية التالية

$$z_4 = -6i \text{ و } z_3 = 7i \text{ و } z_2 = 1-i\sqrt{3} \text{ و } z_1 = 1+i$$

$$\text{و } z_7 = (1-i\sqrt{3})(1+i) \text{ و } z_6 = -5 \text{ و } z_5 = 2$$

$$z_9 = \frac{1-i\sqrt{3}}{1+i} \text{ و } z_8 = (1+i)^3$$

**تمرين 28:** ليكن العددين العقديين :  $z_1 = (1-i)$  و

$$z_2 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}i}{2}$$

1. حدد معيار وعمدة العددين العقديين  $z_1$  و  $z_2$

2. استنتج معيار وعمدة ل :  $z = \frac{z_1}{z_2}$

3. استعمل النتائج السابقة لحساب  $\cos \frac{\pi}{12}$  و  $\sin \frac{\pi}{12}$

**تمرين 29:** نعتبر في المستوى العقدي النقط  $A, B, C, D$

أحاقهم على التوالي:  $z_A = -1+i$  و  $z_B = -1-i$

$$z_D = 2-2i \text{ و } z_C = 2i$$

1. حدد معيار وعمدة العددين العقديين  $z_1 = \frac{z_C - z_B}{z_D - z_B}$  و

$$z_2 = \frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$$

2. استنتج طبيعة كل من المثلثين  $ACD$  و  $BCD$

**تمرين 30:** أحسب  $U$  و  $V$

$$U = (1+i\sqrt{3})^5 + (1-i\sqrt{3})^5 \quad (1)$$

$$V = (1+i\sqrt{3})^5 - (1-i\sqrt{3})^5 \quad (2)$$

**تمرين 31:** نعتبر النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  التي أحاقها على التوالي هي:

$$z_A = -2 \text{ و } z_B = 1+i \text{ و } z_C = -1-3i$$

حدد قياسا للزاوية الموجهة  $(\widehat{AC; AB})$

وما طبيعة المثلث  $ABC$  ؟

**تمرين 32:** ليكن  $z$  عددا عقديا.

أكتب، بدلالة  $\bar{z}$ ، مرافقات الأعداد العقدية التالية:

$$Z_3 = \frac{2z^2 + z - 1}{-3z + i} \text{ و } Z_2 = (z - 5i)(\bar{z} + 5) \text{ و } Z_1 = 3z - 6i$$

**تمرين 33:** نعتبر المتتالية  $(z_n)$  العقدية المعرفة كالتالي :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+1} = (-1+i)z_n + (2i+1) \text{ و } z_0 = 1$$

لتكن المتتالية  $(U_n)$  المعرفة كالتالي :  $U_n = z_n - i$

1. بين أن  $(U_n)$  متتالية هندسية و حدد أساسها  $q$

وحدها الأول  $U_0$

2. أحسب  $q^8$

3. أكتب  $U_n$  بدلالة  $n$  واكتب  $U_n$  على الشكل أمتلثي

4. أحسب المجموع التالي :

$$S = 1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100}$$

**تمرين 34:** نعتبر التطبيق  $g$  من  $\mathbb{C} - \{i\}$  نحو  $\mathbb{C}$  المعروف بما يلي:

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{i\} \quad g(z) = \frac{z+2}{z-i}$$

1. حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $g(z) = iz$   $(E)$ .

2. ليكن  $z_1$  و  $z_2$  حلي المعادلة  $(E)$  أحسب  $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2002} + \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{2002}$

### تمرين 38: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم

( $O; \vec{u}, \vec{v}$ ) نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  اللتين لحاقهما

$$z_B = 2; \quad z_A = i \quad \text{على التوالي هما :}$$

I. 1) حدد لحق النقطة  $B_1$  صورة النقطة  $B$  بالتحاكي

الذي مركزه  $A$  و نسبته  $\sqrt{2}$ .

2) حدد لحق النقطة  $B'$  صورة النقطة  $B_1$  بالدوران

الذي مركزه  $A$  و زاويته  $\frac{\pi}{4}$ .

3) مثل النقط  $A$  و  $B$  و  $B'$ .

II. نعتبر التطبيق  $f$  الذي يربط كل نقطة  $M$  لحقها  $z$  بالنقطة

$$M' \text{ ذات الحق } z' \text{ بحيث: } z' = (1+i)z + 1.$$

1) حدد  $A'$  و  $B'$  صورتين النقطتين  $A$  و  $B$  بالتطبيق  $f$  على التوالي.

2) أ. بين أنه  $\frac{z' - z}{i - z} = -i$  لكل  $z$  مخالف للعدد  $i$ .

ب. بين أن:  $\left\{ \begin{array}{l} MM' = MA \\ \overline{(MA, MM')} = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{array} \right.$  لكل نقطة  $M$  مخالفة للنقط  $A$ .

ج. استنتج طريقة لإنشاء النقطة  $M'$  انطلاقا من النقطة  $M$

حيث  $M \neq A$ .

3) حدد  $(\Gamma)$  مجموعة النقط  $M$  ذات اللحق  $z$  بحيث :

$$|z - 2| = \sqrt{2}.$$

4) أ. بين أن :  $(1+i)(z-2) = -3-2i$  لكل عدد عقدي  $z$ .

ب. استنتج أنه إذا كانت النقطة  $M$  تنتمي إلى  $(\Gamma)$  فإن النقطة

$M'$  تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و شعاعها .

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.  
c'est en s'entraînant

régulièrement aux calculs et  
exercices que l'on devient un



أوجد الأعداد الصحيحة  $n$  بحيث يكون العدد  $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^n$  عددا

حقيقيا.

3) المستوى العقدي  $\rho$  منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$$(O; \vec{u}; \vec{v}).$$

أ) حدد و أنشئ مجموعة النقط  $M(z)$  من  $\rho$  التي تحقق  $|g(z)| = 1$ .

ب) حدد و أنشئ مجموعة النقط  $M(z)$  من التي تحقق

$$\text{Re}(g(z)) = 0.$$

تمرين 35: نعتبر في  $\mathbb{C}$  المعادلة:

$$z \in \mathbb{C}; \quad z^2 - (4 + 2i\sqrt{3})z + 4i\sqrt{3} = 0$$

1) حل في  $\mathbb{C}$  المعادلة  $(E)$  و اكتب الحلول على الشكل المثلثي.

2) لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  صور الأعداد العقدية  $2$  و  $1+i\sqrt{3}$  و

$$3+i\sqrt{3}$$

أ) أنشئ النقط  $A$  و  $B$  و  $C$ .

ب) حدد قياسا للزاوية  $(\overline{OB}, \overline{OC})$ .

ج) بين أن المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع

تمرين 36: نعتبر في المجموعة  $\mathbb{C}$ , المعادلة:

$$(E) \quad z^2 - (1+i(1-\sqrt{3}))z + i + \sqrt{3} = 0$$

1) بين أن المعادلة  $(E)$  تقبل حلا تخيليا صرفا  $z_0$  يجب تحديده.

2) استنتج الحل الثاني للمعادلة  $(E)$ .

3) لتكن النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  ألقاها على التوالي هي:  $z_A = 1+i$  و

$$z_C = 1-i\sqrt{3} \quad \text{و} \quad z_B = i$$

أ) أكتب  $z_A$  و  $z_B$  و  $z_C$  على الشكل المثلثي.

ب) حدد قياسا للزاوية:  $(\overline{AB}, \overline{AC})$ .

ج) حدد مجموعة النقط  $M$  ذات اللحق  $z$  بحيث:

$$|z - 1 + i\sqrt{3}| = |z - 1 - i|$$

تمرين 37: في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم

( $O; \vec{u}, \vec{v}$ ) نعتبر النقطتين  $A$  و  $B$  التي ألقاهما

$$z_B = -2 + 2i; \quad z_A = 1 - 2i \quad \text{على التوالي}$$

ولتكن  $(C)$  الدائرة التي أحد أقطارها هو  $[AB]$

1) أنشئ النقط  $A$  و  $B$

2) حدد  $z_\Omega$  لحق النقطة  $\Omega$  مركز الدائرة  $(C)$  وأحسب شعاع

الدائرة  $(C)$

3) لتكن  $D$  النقطة ذات اللحق :  $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$

أ. حدد الشكل الجبري ثم المثلثي للعدد  $z_D$

ب. بين أن النقطة  $D$  تنتمي للدائرة  $(C)$

ت. حدد لحق النقطة  $E$  التي تنتمي للدائرة  $(C)$  والتي تحقق :

$$\left(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega E}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$