الجذع المشترك العلمي و التكنولوجي	فرض الأولمبياد في الرياضيات للجذع المشترك العلمي - الفرض الأول -	نيابة تاوريرت ثانوية الفتح التأهيلية

حلول مقترحة

تمرين 1 :

نضع: $A=7^{87}$ ، $B=5^{145}$ ، $C=3^{203}$ بملاحظة أن: $87=29\times 3$ و $145=29\times 5$ و $203=29\times 7$

فإن: $A=\left(7^3\right)^{29}$ ، $B=\left(5^5\right)^{29}$ ، $C=\left(3^7\right)^{29}$

إذن يكفي ترتيب $7^3=343$ و $5^5=3125$ و $3^7=2187$ (يمكن استعمال آلة حاسبة و التي لن تكون مفيدة بداية)

بما أن: $7^3<3^7<5^5$ فإن: $\boxed{A<C<B}$

تمرين 2 :

نعلم أن: $(a-b)^2\geq 0$ منه: $a^2+b^2\geq 2ab$ منه: $a^2+b^2+2ab\geq 2ab+2ab$ أي: $(a+b)^2\geq 4ab$

منه: $\dfrac{2ab}{a+b}\leq\dfrac{a+b}{2}$ أو أيضا: $\dfrac{2ab}{a+b}\leq\dfrac{a+b}{2}$ و بنفس الطريقة نبين أن: $\dfrac{2bc}{b+c}\leq\dfrac{b+c}{2}$ و $\dfrac{2ca}{c+a}\leq\dfrac{c+a}{2}$

و بجمع المتفاوتات طرفا بطرف نجد: $\boxed{\dfrac{2ab}{a+b}+\dfrac{2bc}{b+c}+\dfrac{2ca}{c+a}\leq\dfrac{2(a+b+c)}{2}=a+b+c}$

يفترض معرفة بعض المتفاوتات الهامة من بينها: $a^2+b^2\geq 2ab$ و $(a+b)^2\geq 4ab$

تمرين 3 : $a+b+c=0$

1 لدينا: $a+b+c=0$ منه: $a+b=-c$ و $a+b=-c$ منه: $(a+b)^3=(-c)^3=-c^3$

منه: $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=-c^3$ منه: $a^3+3ab(a+b)+b^3+c^3=0$

منه: $a^3+3ab(-c)+b^3+c^3=0$ منه: $\boxed{a^3+b^3+c^3=3abc}$

2 نضع: $S=\left(a^2+b^2+c^2\right)\left(a^3+b^3+c^3\right)$

لدينا: $a+b+c=0$ منه: $(a+b+c)^2=0$ منه: $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=0$

منه:

$$S=a^5+a^2b^3+a^2c^3+b^2a^3+b^5+b^2c^3+c^2a^3+c^2b^3+c^5$$

$$S=a^5+b^5+c^5+a^3\left(b^2+c^2\right)+b^3\left(a^2+c^2\right)+c^3\left(a^2+b^2\right)$$

$$S=a^5+b^5+c^5+a^3\left((b+c)^2-2bc\right)+b^3\left((a+c)^2-2ac\right)+c^3\left((a+b)^2-2ab\right)$$

$$S=a^5+b^5+c^5+a^3\left(a^2-2bc\right)+b^3\left(b^2-2ac\right)+c^3\left(c^2-2ab\right)$$

$$S=a^5+b^5+c^5+a^5-2a^3bc+b^5-2b^3ac+c^5-2c^3ab$$

$$S=2\left(a^5+b^5+c^5\right)-2abc\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$S=2\left(a^5+b^5+c^5\right)-2\frac{\left(a^3+b^3+c^3\right)}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

$$S=2\left(a^5+b^5+c^5\right)-\frac{2}{3}S$$

منه:

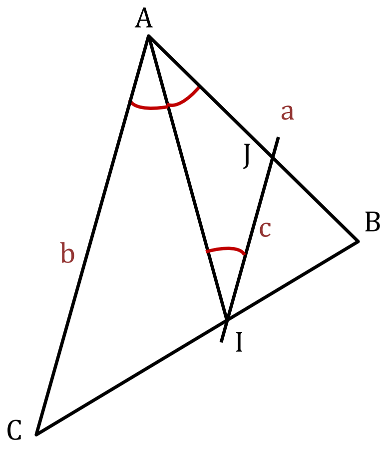
$$S+\frac{2}{3}S=2\left(a^5+b^5+c^5\right)$$

$$\frac{5}{3}S=2\left(a^5+b^5+c^5\right)$$

$$\frac{S}{6}=\frac{a^5+b^5+c^5}{3}$$

أي: $\boxed{\left(\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}\right)\left(\dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}\right)=\dfrac{a^5+b^5+c^5}{5}}$

تمرين 4 :



لدينا $(IJ)//(AC)$ و (AI) قاطع لهما إذن الزاويتان المتبادلتان داخليا $I\hat{A}C$

و $A\hat{I}J$ متقايستان ، و بما أن: $I\hat{A}C = I\hat{A}J$ فإن: $A\hat{I}J = I\hat{A}J$

إذن AIJ مثلث متساوي الساقين في J منه: $AJ = IJ = c$

الآن و باستعمل مبرهنة طاليس المباشرة في المثلث ABC نستنتج أن:

$\frac{JI}{AC} = \frac{BI}{BC} = \frac{BJ}{BA}$ منه: $\frac{JI}{AC} = \frac{BJ}{BA}$ أي: $\frac{JI}{AC} = \frac{AB - AJ}{AB}$ أي: $\frac{c}{b} = \frac{a-c}{a}$

أي: $b(a-c) = ac$ أي: $ab - bc = ac$ منه: $ab = ac + bc$

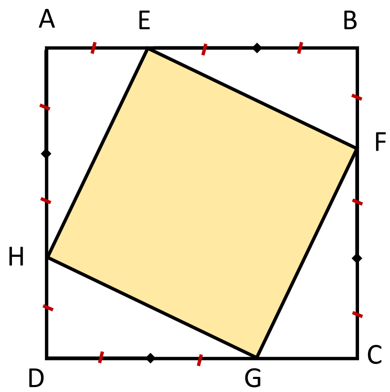
بالتالي: $\boxed{c(a+b) = ab}$

هناك خاصية مرتبطة بموقع المنصف الداخلي لزاوية يفترض معرفتها قد تكون مفيدة في تمرين مشابه و التي تقول:

« في مثلث ABC إذا كانت E هي نقطة تقاطع المنصف الداخلي للزاوية $B\hat{A}C$ مع $[BC]$ فإن: $\frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}$ »

في حالتنا هذه سيكون لدينا: $\frac{AB}{AC} = \frac{IB}{IC}$ لكن لن تفيدنا في البرهان على النتيجة.

تمرين 5 :



لدينا : $S_{AEH} = S_{EBF} = S_{CGF} = S_{HDG} = \frac{AE \times AH}{2} = \frac{\frac{a}{3} \times \frac{2a}{3}}{2} = \frac{a^2}{9}$

منه: $\boxed{S_{EHGF} = S_{ABCD} - 4S_{AEH} = a^2 - \frac{4a^2}{9} = \frac{5}{9}a^2}$

تمرين جد سهل