

المستوى : جدع مشترك علمي	الرياضيات	الجدادة رقم : 1 الدورة الثانية
المكون : الهندسة التحليلية	المرجع : النجاح في الرياضيات الواضح في الرياضيات في رحاب الرياضيات مواقع إلكترونية	المدة الزمنية : 7 ساعات
أسبوع من : 5 مارس 2012 إلى 13 مارس 2012 ..... السنة الدراسية 2011 - 2012		
<b>الفصل</b> <u>النظمت</u>		
<b>المحتوى</b> و <b>الخصائص</b>	<p><b>I. الجداء السلمي</b></p> <p>1. تعريف الجداء السلمي باستعمال الإسقاط العمودي</p> <p>2. حالات خاصة (تعامد متجهتين – المربع السلمي لمتجهة)</p> <p>3. تطبيقات</p> <p><b>II. الصيغة المثلثية للجداء السلمي :</b></p> <p><b>III. خاصيات الجداء السلمي</b></p> <p>1. تبادلية الجداء السلمي</p> <p>2. توزيعية الجداء السلمي</p> <p>3. خاصية <math>\alpha(\bar{U} \cdot \bar{V})</math></p> <p>4. المتطابقات الهامة</p> <p><b>IV. تطبيقات الجداء السلمي :</b></p> <p>1. العلاقات المترية في المثلث القائم الزاوية</p> <p>2. مبرهنة الكاشي</p> <p>3. مبرهنة المتوسط</p> <p>4. مساحة مثلث :</p>	<p><b>القدرات المنتظرة أو التعليمات المستهدفة</b></p> <p>1. التمكن من التعبير عن المسافة والتعامد بواسطة الجداء السلمي</p> <p>2. استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية ,</p> <p>3. استعمال مبرهنة الكاشي ومبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية</p>
<b>الكفايات</b>	<p>1. التعرف على الجداء السلمي بالإسقاط العمودي</p> <p>2. التعبير عن المسافة والتعامد بواسطة الجداء السلمي</p> <p>3. التعرف على الصيغة المثلثية للجداء السلمي</p> <p>4. التعرف على بعض خاصيات الجداء السلمي (التبادلية والتوزيعية والمتطابقات الهامة).</p> <p>5. استعمال العلاقات المترية لحساب المسافات والأطوال.</p> <p>6. التعرف على مبرهنة الكاشي واستعمالها في حل بعض المسائل الهندسية</p> <p>7. التعرف على مبرهنة المتوسط واستعمالها في حل بعض المسائل الهندسية</p> <p>8. حل مسائل هندسية باستعمال الجداء السلمي.</p>	<p><b>المكتسبات القبلية:</b></p> <p>❖ الإسقاط العمودي</p> <p>❖ مبرهنة فيثاغورس</p> <p>❖ المتجهات</p> <p>❖ الحساب المثلثي</p>
<b>براهين :</b>	<p>الصيغة المثلثية للجداء السلمي</p> <p>قواعد الحساب المثلثي</p> <p>مبرهنة الكاشي</p> <p>العلاقات المترية في المثلث</p> <p>مبرهنة المتوسط</p>	<p><b>امتدادات :</b></p> <p>❖ تحليلية الجداء السلمي والهندسة الفضائية.</p> <p>❖ العلوم الفيزيائية</p>
<b>تقنيات ومهارات</b>	لا شئ	<p><b>الأدوات اليداكتيكية :</b></p> <p>السيبورة - المسطرة - الكوس - المنقلة - البركار</p>
<b>المحتوى</b>		

## I. معادلات من الدرجة الأولى بمجهولين

### 1. أنشطة

نعتبر في  $\mathbb{R}^2$  المعادلة التالية  $3x - 2y + 1 = 0$

هل الأزواج  $(1; 2)$  و  $(2; -1)$  و  $(0; \frac{1}{2})$  حلول للمعادلة

لنحدد جميع حلول المعادلة

لتكن  $S$  مجموعة الحلول

$$S = \left\{ \left( a; \frac{3a+1}{2} \right) / a \in \mathbb{R} \right\} \text{ إذن } Y = \frac{3a+1}{2} \text{ ومنه } x = a$$

$$\text{حل المترابحة } x \in \mathbb{R} \quad 5x - 7 \leq \frac{11}{2}x + 4$$

### 2. تعريف

كل معادلة على شكل  $ax + by + c = 0$  حيث  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية معلومة هي معادلة من الدرجة الأولى بمجهولين  
حل المعادلة  $ax + by + c = 0$  هي إيجاد جميع الأزواج التي تحققها.

### تمرين :

حل في  $\mathbb{R}^2$  المعادلات التالية :  $2x - y + 1 = 0$  ;  $2y + 4 = 0$  ;  $3x - 1 = 0$

## II. النظم

### 1. أنشطة

أ. بين أن النظمة  $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x + 5y = -2 \end{cases}$  تقبل حلا وحيدا بدون حساب المجهولين ثم حل النظمة بطريقتين مختلفتين ( التعويضية والتألفية الخطية)

ب. بين أن النظمة  $\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ -\frac{2}{3}x + y = -2 \end{cases}$  لا تقبل حلا

### 2. دراسة أنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين

#### أ. تعريف

تسمى أنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل أنظمة من شكل  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حيث  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  حيث  $a$

و  $b$  و  $a'$  و  $b'$  أعداد حقيقية

#### ب. دراسة عامة

لنحل في  $\mathbb{R}^2$  النظمة التالية :  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حيث  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  و  $(a; b) \neq (0; 0)$  و  $(a'; b') \neq (0; 0)$

$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b'(ax + by) - b(a'x + b'y) = b'c - bc' \\ a(a'x + b'y) - a'(ax + by) = ac' - a'c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (ab' - a'b)x = b'c - bc' \\ (ab' - a'b)y = ac' - a'c \end{cases}$$

ومن هنا حل النظمة يتوقف على العدد  $ab' - a'b$

المستوى : جدع مشترك علمي

العدد  $ab' - a'b$  يسمى محددة النظمة نرمز له بـ  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

❖ إذا كان  $ab' - a'b \neq 0$  فإن النظمة تقبل حلا وحيدا :

$$y = \frac{ac' - a'c}{ab' - a'b} \text{ و } x = \frac{b'c - bc'}{ab' - a'b}$$

❖ إذا كان  $ab' - a'b = 0$  فإن  $\begin{cases} b'c - bc' = 0 \\ ac' - a'c = 0 \end{cases}$   $\Leftrightarrow \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$

➤ إذا كان  $b'c - bc' = 0$  و  $ac' - a'c = 0$  فإن  $S$  هي مجموعة حلول المعادلة  $ax + by = c$

➤ إذا كان  $b'c - bc' \neq 0$  أو  $ac' - a'c \neq 0$  فإن  $S = \phi$

**تعريف وخاصة**

نعتبر  $a$  و  $b$  و  $a'$  و  $b'$  أعداد حقيقية حيث  $(a;b) \neq (0;0)$  و  $(a';b') \neq (0;0)$

العدد  $ab' - a'b$  يسمى محددة النظمة نرمز له بـ  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$  نكتب  $\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$

❖ للنظمة  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حلا وحيدا إذا فقط إذا كان  $ab' - a'b \neq 0$

في هذه الحالة تسمى النظمة نظمة كرامر وحل النظمة هو:  $x = \frac{\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}}{\Delta}$  و  $y = \frac{\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}}{\Delta}$  حيث  $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$

❖ للنظمة  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  ما لا نهاية من الحلول أو ليس لها حلا إذا فقط إذا كان  $ab' - a'b = 0$

في هذه الحالة -- إذا كان  $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} = 0$  و  $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} = 0$  فإن  $S$  هي مجموعة حلول المعادلة  $ax + by = c$

-- إذا كان  $\begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix} \neq 0$  أو  $\begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix} \neq 0$  فإن  $S = \phi$

**تمرين :**

حل في  $\mathbb{R}^2$  النظمات التالية :  $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ -3x - \frac{3}{2}y = 3 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} \sqrt{2}x - y = 2 \\ x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 1 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} 2\sqrt{3}x - y = 2 \\ 3x + \sqrt{3}y = 3 \end{cases}$

حل وناقش وفق البارامتر حيث  $m$  النظمة  $\begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ x + my = 2 \end{cases}$

**3. نظمات تآلفية أخرى**

أ. نظمة ثلاث معادلات بمجهولين

حل في  $\mathbb{R}^2$  النظمات التالية :  $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ x - y = 4 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$  ;  $\begin{cases} 2x - 5y = 1 \\ x + 2y = -4 \\ 3x - 4y = -2 \end{cases}$

ب. نظمة معادلات من الدرجة الأولى بعدة مجاهيل

المستوى : جدع مشترك علمي

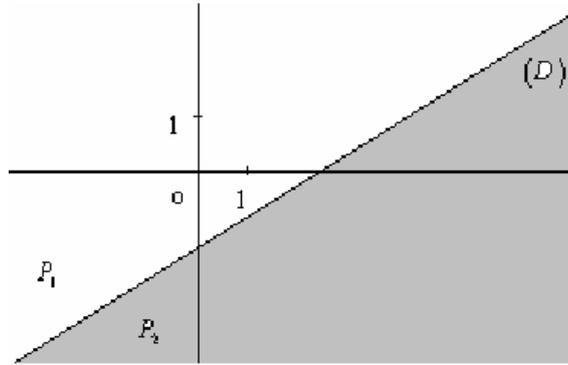
$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2y - z = 1 \end{cases} ; \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x - y + z = 1 \\ x - 2y - 2z = 5 \end{cases}$$

### III. المتراجحات من الدرجة الأولى بمجهولين

1. إشارة  $ax + by + c$

خاصية : (نقلها)

كل مستقيم  $(D)$  معادلته  $ax + by + c = 0$  يحدد في المستوى نصفي مستوى مفتوحين  $P_1$  و  $P_2$  (لا يتضمنان  $(D)$ )  
أحدهما هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $ax + by + c < 0$   
والآخر هو مجموعة النقط  $M(x; y)$  حيث  $ax + by + c > 0$



#### ملاحظة :

لنحدد إشارة  $ax + by + c$  يكفي تحديدها من أجل زوج إحداثياتي نقطة  $A$  من المستوى لا تنتمي إلى  $(D)$   
ج. دراسة عامة

تسمى أنظمة معادلتين من الدرجة الأولى بمجهولين كل أنظمة من شكل  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حيث  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

حيث  $a$  و  $b$  و  $a'$  و  $b'$  أعداد حقيقية

لنحل في  $\mathbb{R}^2$  النظام التالي :  $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$  حيث  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  و  $(a; b) \neq (0; 0)$  و  $(a'; b') \neq (0; 0)$

و  $(a'; b') \neq (0; 0)$

### IV. المعادلة التألفية

1. مفهوم معادلة تألفية

تعريف

كل معادلة يمكن كتابتها على شكل  $ax + b = 0$   $x \in \mathbb{R}$  تسمى معادلة تألفية وتسمى معادلة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان  $a \neq 0$

المستوى : جدع مشترك علمي

## 2. حل معادلة تآلفية

نحل المعادلة  $x \in \mathbb{R} \quad ax + b = 0$

إذا كان  $a = b = 0$  فإن  $S = \mathbb{R}$

إذا كان  $a = 0$  و  $b \neq 0$  فإن  $S = \emptyset$

إذا كان  $a \neq 0$  فإن  $ax + b = 0$  تكافئ  $x = \frac{-b}{a}$  أي أن  $S = \left\{ \frac{-b}{a} \right\}$

## 3. حل معادلة $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) = 0$ حيث $a \neq 0$ و $c \neq 0$

$(ax + b)(cx + d) = 0$  تكافئ  $ax + b = 0$  أو  $cx + d = 0$

إذن مجموعة حلول المعادلة  $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) = 0$  هي اتحاد مجموعة حلول المعادلة  $ax + b = 0$  و  $cx + d = 0$

$x \in \mathbb{R} \quad cx + d = 0$

**تمرين :**

حل المعادلة  $x \in \mathbb{R} \quad (2x + 1)(-3x - 5) = 0$

## V. المتراجحات التآلفية بمجهول واحد

### 1. تعريف

كل متراجحة يمكن كتابتها على شكل  $x \in \mathbb{R} \quad ax + b < 0$  أو  $x \in \mathbb{R} \quad ax + b \leq 0$  أو  $x \in \mathbb{R} \quad ax + b > 0$  أو  $x \in \mathbb{R} \quad ax + b \geq 0$  حيث  $(a; b) \in \mathbb{R}^2$  تسمى متراجحة تآلفية وتسمى متراجحة من الدرجة الأولى بمجهول واحد إذا كان  $a \neq 0$

### 2. حل متراجحة تآلفية بمجهول واحد

أ. إشارة الحدانية  $ax + b$

إذا كان  $a = 0$  فإن إشارة  $ax + b$  هي إشارة  $b$

إذا كان  $a \neq 0$  فإن  $ax + b = a \left( x + \frac{b}{a} \right)$  وبالتالي إشارة  $ax + b$  مرتبطة بإشارة  $a$  و  $\left( x + \frac{b}{a} \right)$

$x + \frac{b}{a} > 0$  تكافئ  $x > -\frac{b}{a}$

$x + \frac{b}{a} < 0$  تكافئ  $x < -\frac{b}{a}$

نلخص هذه الدراسة في جدول يسمى جدول إشارة  $ax + b$

$x$	$-\infty$				$-\frac{b}{a}$				$+\infty$
$ax + b$	عكس إشارة $a$				0	إشارة $a$			

**تمرين :**

حل المتراجحتين  $x \in \mathbb{R} \quad 2x + 3 < 0$  و  $x \in \mathbb{R} \quad -3x + 4 \leq 0$  بطريقتين مختلفتين

### 3. حل المتراجحة $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) \leq 0$ أو من نوع $x \in \mathbb{R} \quad (ax + b)(cx + d) > 0$

حل هذا النوع من المتراجحات يعتمد على دراسة  $(ax + b)(cx + d)$  بتوظيف إشارة كل من  $(ax + b)$  و  $(cx + d)$

**تمرين :**

حل المتراجحتين :

$x \in \mathbb{R} \quad (-2x - 3)(3x + 5) \geq 0$  و  $x \in \mathbb{R} \quad (2x + 3)(-3x + 1) < 0$

المستوى : جدع مشترك علمي

## VI. المعادلات من الدرجة الثانية بمجهول واحد

### 1. تعريف

تسمى معادلة من الدرجة الثانية في  $IR$  كل معادلة على شكل  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $x \in IR$  و  $a$  و  $b$  و  $c$  أعداد حقيقية و  $a$  غير منعدم

### 2. أمثلة

حل في  $IR$  المعادلات التالية :  $x^2 - 2x + 3 = 0$  ;  $x^2 - 6x - 7 = 0$  ;  $2x^2 + 1 = 0$  ;  $x^2 - 5 = 0$  ;  $3x^2 - \sqrt{3}x = 0$

### 3. بصفة عامة

نعتبر المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $x \in IR$  و  $a \neq 0$  لكل  $x \in IR$

$$\text{لدينا : } ax^2 + bx + c = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$$\text{الكتابة : } ax^2 + bx + c = 0 \text{ تسمى الشكل القانوني لثلاثية الحدود } a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right)$$

$$\text{لنحل المعادلة : } ax^2 + bx + c = 0 \text{ تكافئ } \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0$$

من خلال هذا يتبين أن حل المعادلة يتوقف على إشارة العدد  $b^2 - 4ac$  الذي يسمى مميز المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  نرسم له  $\Delta = b^2 - 4ac$  نكتب

$$\text{❖ إذا كان } \Delta < 0 \text{ فإن } \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0 \text{ وبالتالي المعادلة لا تقبل حلا في } IR$$

$$\text{❖ إذا كان } \Delta = 0 \text{ فإن } x + \frac{b}{2a} = 0 \text{ أي } x = -\frac{b}{2a}$$

$$\text{❖ إذا كان } \Delta > 0 \text{ فإن } ax^2 + bx + c = 0 \text{ تكافئ } \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$$

$$\text{تكافئ } \left( x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) \left( x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right) = 0$$

$$\text{تكافئ } x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0 \text{ أو } x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} = 0$$

$$\text{تكافئ } x = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ أو } x = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

### مبرهنة

نعتبر المعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$  حيث  $x \in IR$  و  $a \neq 0$  و  $S$  مجموعة حلولها في  $IR$ .  
العدد  $b^2 - 4ac$  يسمى مميز المعادلة أو ثلاثية الحدود  $ax^2 + bx + c = 0$  نرسم له  $\Delta$  ونكتب  $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\text{❖ إذا كان } \Delta < 0 \text{ فإن } S = \emptyset$$

$$\text{❖ إذا كان } \Delta = 0 \text{ فإن } S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$$

$$\text{❖ إذا كان } \Delta > 0 \text{ فإن } S = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} ; \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}$$

المستوى : جدع مشترك علمي

اصطلاح :

إذا كان :  $\Delta = 0$  فإن :  $x = -\frac{b}{2a}$  في هذه الحالة نقول إن  $-\frac{b}{2a}$  حل مزدوج للمعادلة

ملاحظة :

إذا كان :  $a$  و  $c$  لهما إشارتان مختلفتين فإن للمعادلة حلين .

تمرين 1 :

حل في  $IR$  المعادلات

$$5x^2 - 4x + 2 = 0 \quad ; \quad x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$4x^2 + 3x - 1 = 0 \quad ; \quad x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$$

تمرين 2 :

نعتبر  $ABC$  مثلث قائم الزاوية في  $A$  حيث  $AB = 9$  و  $AC = 4$   
حدد موضع نقطتين  $E$  و  $D$  تنتميان على التوالي ل  $[AB]$  و  $[AC]$  بحيث  $AD = BE$  ومساحة المثلث  $ADE$  تساوي

مساحة الرباعي  $BCDE$

اختيار المجهول : نضع  $AD = BE = x$

مساحة المثلث  $ADE$  هي  $\frac{x(9-x)}{2}$

مساحة الرباعي  $BCDE$  هي  $\frac{4 \times 9}{2} - \frac{x(9-x)}{2}$

لدينا :  $\frac{4 \times 9}{2} - \frac{x(9-x)}{2} = \frac{x(9-x)}{2}$

ومنه  $x^2 - 9x + 18 = 0$

**4.نتيجة**

نعتبر معادلة من شكل  $ax^2 + 2b'x + c = 0$  و  $x \in IR$  و  $a \neq 0$

لدينا  $\Delta = 4(b'^2 - ac)$  نضع  $\Delta' = b'^2 - ac$

إشارة  $\Delta$  هي إشارة  $\Delta'$

❖ إذا كان :  $\Delta' < 0$  فإن :  $S = \emptyset$

❖ إذا كان :  $\Delta = 0$  فإن :  $S = \left\{ -\frac{b'}{a} \right\}$

❖ إذا كان :  $\Delta > 0$  فإن :  $S = \left\{ \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a} ; \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} \right\}$

العدد  $\Delta'$  يسمى المميز المختصر للمعادلة

تمرين :

حل :  $x \in IR$  ;  $6x^2 - 2\sqrt{3}x - 1 = 0$

**5.تعميل ثلاثية الحدود**

نعتبر ثلاثية الحدود  $T(x) = ax^2 + 2b'x + c = 0$  بحيث  $a \neq 0$

ليكن  $\Delta$  مميزها

❖ إذا كان :  $\Delta < 0$  فإن :  $T(x)$  لا تقبل جذرا وبالتالي  $T(x)$  لا يمكن تعميلها في  $IR$

❖ إذا كان :  $\Delta = 0$  فإن :  $T(x)$  لها جذر وحيد  $-\frac{b'}{2a}$  وبالتالي  $T(x) = a\left(x + \frac{b'}{2a}\right)^2$  لا يمكن تعميلها في  $IR$

❖ إذا كان :  $\Delta > 0$  فإن :  $T(x)$  لها جذرين مختلفين  $x_1$  و  $x_2$

المستوى : جدع مشترك علمي

وبالتالي :  $T(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

**تمرين :**

عمل :  $P(x) = 3x^2 - 4x - 4$  ;  $Q(x) = 3x^2 - (1 + \sqrt{3})x + 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

**6. معادلات تؤول في حلها إلى معادلات من الدرجة الثانية**

**مثال 1 :** حل  $x \in \mathbb{R}$   $x^4 - 7x^2 + 12 = 0$

**مثال 2 :** حل  $x \in \mathbb{R}$   $2x - 7\sqrt{x} - 4 = 0$

**مثال 3 :** نعتبر  $P(x) = 2x^3 - 3x^2 - x + 1$

احسب  $P\left(\frac{1}{2}\right)$  ثم حل المعادلة :  $P(x) = 0$

**7. مجموع وجداء جذري ثلاثية الحدود**

نعتبر  $P(x) = ax^2 + bx + c$  بحيث  $a \neq 0$   
نفترض أن  $\Delta > 0$  وأن جذريهما  $x_1$  و  $x_2$   
لكل  $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{لدينا} \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2 \\ \text{إذن : } x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad x_1x_2 = \frac{c}{a} \end{aligned}$$

**خاصية**

إذا كان للمعادلة  $ax^2 + bx + c = 0$   $x \in \mathbb{R}$  حيث  $a \neq 0$  حلان  $x_1$  و  $x_2$   
فإنهما يحققان العلاقتين  $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$  و  $x_1x_2 = \frac{c}{a}$

**تمرين :**

تأكد أن للمعادلة :  $4x^2 - 7x + 5 = 0$  جذران  $x_1$  و  $x_2$  ثم احسب  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$  دون حساب  $x_1$  و  $x_2$

**VII. المتراجحات من الدرجة الثانية بمجهول واحد**

**1. إشارة ثلاثية الحدود من الدرجة الثانية**

نعتبر ثلاثية الحدود  $T(x) = ax^2 + bx + c$   $x \in \mathbb{R}$   
ليكن  $\Delta$  مميزها

$$T(x) = a \left( \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right)$$

الشكل القانوني

إذا كان  $\Delta < 0$  فإن إشارة  $ax^2 + bx + c$  هي إشارة  $a$

إذا كان  $\Delta = 0$  فإن  $ax^2 + bx + c$  يكون منعدما من أجل  $x = -\frac{b}{a}$  وإشارتها هي إشارة  $a$  لكل  $x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$

إذا كان  $\Delta > 0$  فإن  $T(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$  حيث  $x_1$  و  $x_2$  جذري  $ax^2 + bx + c$

المستوى : جدع مشترك علمي

نفترض  $x_1 < x_2$

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$x - x_1$	-	0	+	+
$x - x_2$	-	-	0	+
$T(x)$	إشارة $a$	0	عكس إشارة $a$	إشارة $a$

- ❖ إذا كان  $\Delta < 0$  فإن إشارة  $ax^2 + bx + c$  هي إشارة
- ❖ إذا كان  $\Delta = 0$  فإن إشارة  $ax^2 + bx + c$  هي إشارة  $a$  لكل  $x$  من  $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{b}{a} \right\}$
- ❖ إذا كان  $\Delta > 0$  و  $x_1$  و  $x_2$  جذري  $ax^2 + bx + c$  حيث  $x_1 < x_2$  فإن إشارة  $ax^2 + bx + c$  هي إشارة  $a$  خارج الجذرين وعكس إشارة  $a$  داخل الجذرين

## 2. المتراجحات

أ. حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحات التالية

$$x^2 - 2x + 3 < 0 ; x^2 - 6x - 7 \leq 0 ; 2x^2 + 1 \geq 0 ; x^2 - 5 >= 0 ; 3x^2 - \sqrt{3}x \geq 0$$

ب. متراجحات تؤول في حلها إلى متراجحات من الدرجة الثانية

### مثال 1

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحتين  $2x^4 - 9x^2 + 4 > 0$  ;  $\frac{x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2}}{x^2 - x - 2} \geq 0$

### مثال 2

نعتبر  $P(x) = 6x^3 - 13x^2 + 4$

تأكد أن  $\sqrt{2}$  جذر للحدودية  $P(x)$

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $P(x) \leq 0$

حل في  $\mathbb{R}$  المتراجحة  $P(x) \leq 3x^2(x - 2)$

### تمرين

نعتبر  $P(x) = -x^3 + (3+a)x^2 - (2+3a)x + 2a$

بين أن  $a$  جذر للحدودية  $P(x)$

حدد حدودية  $Q(x)$  حيث  $P(x) = (x - a)Q(x)$

ادرس إشارة  $-x^2 + 3x - 2$

حل في  $\mathbb{R}$   $P(x) > 0$  حيث  $Q(a) > 0$