ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى جذع مشترك علوم

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس الترتيب في مجموعة الأعداد الحقيقية

I. تعاريف : ليكن a و b عددين حقيقيين.

1)نقول إن a أصغر من أو يساوي b و نكتب $a \le b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}^+$

2)نقول إن a أكبر من أو يساوي b و نكتب $a \ge b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}^+$

3)نقول إن a أصغر قطعا من b و نكتب $a \prec b$ إذا كان $(b-a) \in \mathbb{R}_+^*$

4)نقول إن a أكبر قطعا من b و نكتب $a \succ b$ إذا كان $(a-b) \in \mathbb{R}_+^*$

اذن: لمقارنة عددين حقيقيين نحسب الفرق وندرس اشارته

مثال : $a \in \mathbb{R}$ قارن : $2a$ و a^2+1

الجواب: $(a^2+1)-2a = a^2-2a+1 = (a-1)^2 \ge 0$

ومنه $a^2+1 \ge 2a$ مهما يكن : $a \in \mathbb{R}$

II. خاصيات : لتكن a و b و c و d أعدادا حقيقية.

خاصية 1: إذا كان $a \le b$ و $b \le c$ فان $a \le c$

ملحوظة : إذا كان $a \le b$ و $b \prec c$ فان $a \prec c$

الخاصية (1) تعني أنه لمقارنة a و c يكفي مقارنة و مع نفس العدد b.

خاصية الترتيب و الجمع:

$a \le b$ يكافئ $a+c \le b+c$

- إذا كان $a \le b$ و $c \le d$ فان $a+c \le b+d$
- إذا كان $a \ge 0$ و $b \ge 0$ فان $a+b \ge 0$ و $ab \ge 0$.

خاصية الترتيب و الضرب:

- إذا كان $c \succ 0$, فان: $a \le b$ يكافئ $ac \le bc$
- إذا كان $c \prec 0$ فان: $a \le b$ يكافئ $ac \ge bc$
- إذا كان $0 \le a \le b$ و $0 \le c \le d$ فان $0 \le ac \le bd$
- إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ فان $a+b \le 0$ و $ab \ge 0$.

خاصية الترتيب و المقلوب: a و b عددان حقيقيان غير منعدمين و لهما نفس إشارة $(ab \succ 0)$ $a \le b$ يكافئ $\frac{1}{b} \le \frac{1}{a}$

إذا كان $a \le b$ و $c \prec d$ فان $a+c \prec b+d$.

خاصية الترتيب و المربع- الترتيب و الجذر المربع:

a و b عددان حقيقيان موجبان.

$a \le b$ يكافئ $a^2 \le b^2$ و $a \le b$ يكافئ $\sqrt{a} \le \sqrt{b}$

ولكل a من $\mathbb{R}$: $a^2 \ge 0$

ملحوظة: جميع الخاصيات السابقة تبقى صحيحة اذا عوضنا الرمز $\le$ بأحد الرموز: $\ge$ أو $\prec$ أو $\succ$.

إذا كان $a \le 0$ و $b \le 0$ $a \le b$ يكافئ $a^2 \ge b^2$

III. القيمة المطلقة و خاصياتها:

1) إذا كان $x \ge 0$ فان: $|x| = x$ و إذا كان $x \le 0$ فان: $|x| = -x$

مثال: $|3| = 3$ و $\left|\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ و $\left|-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}$ و $|1-\sqrt{3}| = -(1-\sqrt{3}) = -1+\sqrt{3}$

2)خاصيات:

- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $|x| \ge 0$ و $|x^2| = |x|^2 = x^2$ و $-|x| \le x \le |x|$
- لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $|-x| = |x|$ و $\sqrt{x^2} = |x|$
- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|xy| = |x||y|$ و $|x+y| \le |x|+|y|$
- إذا كان $y \ne 0$ فان: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.
- لكل a من $\mathbb{R}^*$ $|x| = a$ يكافئ $x = a$ أو $x = -a$.
- لكل x و y من $\mathbb{R}$ لدينا: $|x| = |y|$ يكافئ $x = y$ أو $x = -y$.

IV. المجالات : ليكن a و b عددين حقيقيين بحيث $a \prec b$.

ندرج في الجدولين التاليين جميع أنواع المجالات :

مصطلحات: الرمزان $+\infty$ و $-\infty$ ليسا بعددين

المجال	المتفاوتة
$[a,b]$	$a \le x \le b$
$]a,b]$	$a \prec x \le b$
$[a,b[$	$a \le x \prec b$
$]a,b[$	$a \prec x \prec b$

المجال	المتفاوتة
$]b,+\infty[$	$x \succ b$
$[b,+\infty[$	$x \ge b$
$]-\infty,a]$	$x \le a$
$]-\infty,a[$	$x \prec a$

- $+\infty$ تقرأ: زائد اللانهاية, $-\infty$ تقرأ: ناقص اللانهاية.
- $[a,b]$ يقرأ:"المجال المغلق a , b " أو " القطعة a , b "
- $]a,b[$ يقرأ " المجال المفتوح a , b "
- $]a,+\infty[$ يقرأ " المجال a , زائد اللانهاية, مفتوح من a "

ملحوظة: $\mathbb{R}^+ = [0,+\infty[$ و $\mathbb{R}^- =]-\infty,0]$

و $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ و $\mathbb{R}_-^* =]-\infty,0[$

V. تأطير عدد حقيقي: تعريف: ليكن x عددا حقيقيا.

تأطير العدد x يعني إيجاد عددين حقيقيين a و b مع $a \prec b$ بحيث:

$a \le x \le b$ أو $a \le x \prec b$ أو $a \prec x \le b$ أو $a \prec x \prec b$.

العدد الحقيقي الموجب قطعا $b-a$ يسمى سعة التأطير

و العددان a و b هما محدات التأطير.

VI. التقريبات والتقريبات العشرية:

التقريبات : ليكن a و x عنصرين من $\mathbb{R}$ و r عددا حقيقيا موجبا قطعا.

- إذا كان $a \le x \le a+r$ نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بتفريط.
- إذا كان $a-r \le x \le a$ نقول إن a قيمة مقربة للعدد x بالدقة r بإفراط.
- إذا كان $|x-a| \le r$ نقول إن a قيمة مقربة(أو بالتقريب) للعدد x بالدقة r .
- **خاصية:** إذا كان $a \le x \le b$ تأطيرا للعدد x فان:
  - o العدد a قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بتفريط. و العدد b قيمة مقربة للعدد x بالدقة $b-a$ بإفراط .
  - o العدد $\frac{a+b}{2}$ قيمة مقربة للعدد x بالدقة $\frac{b-a}{2}$.

مثال: من التأطير $2,645 \le \sqrt{7} \le 2,646$ نستنتج أن:

- o العدد $2,645$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بتفريط.
- o العدد $2,646$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 10^{-3} بإفراط.
- o العدد $2,6455$ قيمة مقربة للعدد $\sqrt{7}$ بالدقة 5×10^{-4} بتفريط.

- **التقريب العشري لعدد حقيقي والجزء الصحيح لعدد حقيقي:**

لكل عدد حقيقي x يوجد عدد صحيح نسبي و حيد p بحيث:

$p \le x \le p+1$ و p يسمى الجزء الصحيح للعدد x و نكتب: $E(x) = p$

مثال : لدينا: $1 \le \sqrt{2} \le 2$ و منه فان $E(\sqrt{2}) = 1$