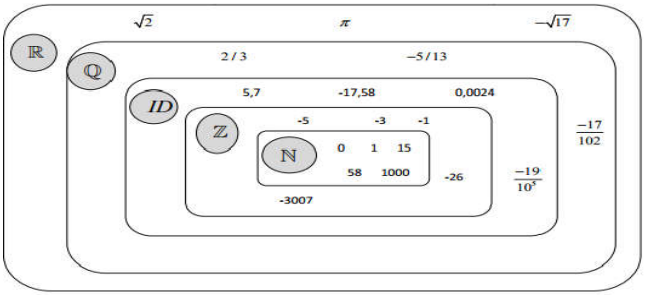
مستوى الجذع مشترك علمي **الأستاذ: عثماني نجيب**

مجموعات الأعداد و العمليات

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- كتابة وترميز؛ - أمثلة من أعداد لاجذرية؛ - العمليات في IN وخاصياتها؛ - القوى وخاصياتها؛ قوى العدد 10، الكتابة العلمية لعدد عشري؛ - المتطابقات: $(a+b)^2$ و $(a-b)^2$ و a^2-b^2 و a^3-b^3 و a^3+b^3؛ - النشر والتعميل	- إدراك العلاقات بين الأعداد والتمييز بين مختلف مجموعات الأعداد؛ - تحديد كتابة مناسبة لتعبير جبري حسب الوضعية المدروسة.	- يتم توليف مختلف المعارف المكتسبة حول الأعداد ثم إدخال الرموز الخاصة بمجموعات هذه الأعداد والتمييز بينها. - انطلاقا من أنشطة وتمارين، يقدم الجذر المربع لعدد صحيح طبيعي الذي ليس مربعا كاملا، كمثال لعدد لاجذري. - انطلاقا من أنشطة، يتم التذكير بخصائص العمليات في المجموعة IN وبمختلف المتطابقات الهامة التي ينبغي تدعيمها بالمتطابقتين a^3-b^3 و a^3+b^3. - إن خصائص وتقنيات العمليات في IN يجب صيانتها وتدعيمها كلما سنحت الفرصة، وفي مختلف فصول المقرر.

أنشطة



I. المجموعات $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, D , $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$.

- الأعداد الصحيحة الطبيعية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{N}$ و نكتب: $\mathbb{N}=\{0;1;2;\cdots\}$
- الأعداد الصحيحة النسبية أي الأعداد الصحيحة الطبيعية و مقابلاتها تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Z}$ و نكتب: $\mathbb{Z}=\{\cdots-3;-2;0;1;2;3;\cdots\}$
- الأعداد العشرية تكون مجموعة نرمز لها بالرمز D
- الأعداد الجذرية أي الأعداد التي تكتب على الشكل $\frac{a}{b}$ حيث: $a\in\mathbb{Z}$ و $b\in\mathbb{N}^*$, تكون مجموعة نرمز لها بالرمز $\mathbb{Q}$.
- الأعداد الجذرية و اللاجذرية تكون مجموعة الأعداد الحقيقية و نرمز لها بالرمز $\mathbb{R}$.

أمثلة : استعمال الرموز: $\notin;\in;\not\subset;\subset$

- العدد 7- هو عنصر من $\mathbb{Z}$ نكتب $-7\in\mathbb{Z}$ نقرأ:" 7- ينتمي الى $\mathbb{Z}$ " في حين 7- لا ينتمي الى $\mathbb{N}$ و نكتب $-7\notin\mathbb{N}$
- لدينا $\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$ و $\frac{2}{3}\notin D$ و ذلك لأنه لا يمكن كتابة $\frac{2}{3}$ على الشكل $\frac{a}{10^n}$ حيث $a\in\mathbb{Z}$ و $n\in\mathbb{N}$.
- $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ لكن $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ لأنه لا يمكن ايجاد عددين صحيحين a و b بحيث $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ و b غير منعدم.
- كل عدد صحيح طبيعي هو عدد صحيح نسبي, نقول ان المجموعة $\mathbb{N}$ توجد ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$.
- ليس كل عدد عشري هو عدد صحيح نسبي, نقول ان المجموعة D ليست ضمن $\mathbb{Z}$ و نكتب $D\not\subset\mathbb{Z}$.

لأي هناك عناصر من D لا تنتمي الى $\mathbb{Z}$. كذلك: كل عنصر من D هو عنصر من $\mathbb{Q}$: $D\subset\mathbb{Q}$

و كل عنصر من $\mathbb{Q}$ هو عنصر من $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$.

لدينا اذن: $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset D\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$

تمرين1: باستعمال الرموز: $\notin;\in;\not\subset;\subset$ املأ الفراغات التالية : $6\ldots\mathbb{Z}$ و $\frac{2}{3}\ldots\mathbb{Q}$ و $\sqrt{2}\ldots\mathbb{Q}$ و $\sqrt{2}\ldots\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}\ldots\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}\ldots\mathbb{Q}$ و $-\frac{2}{3}\ldots\mathbb{R}^+$ و $\frac{2}{3}\ldots\mathbb{N}$ و $\frac{6}{2}\ldots\mathbb{N}$ و $\frac{\sqrt{100}}{5}\ldots\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}\ldots\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}\ldots\mathbb{Q}$ و $\pi\ldots\mathbb{Z}$ و $0\ldots\mathbb{Q}^*$ و $-\frac{7}{3}\ldots\mathbb{Q}^{+*}$ و $\sqrt{16}\ldots\mathbb{N}$ و $0\ldots\mathbb{R}^*$ و $\{1;3;-8\}\ldots\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}^+\ldots\mathbb{R}$

الجواب: $6\in\mathbb{Z}$ و $\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$ و $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ و $\sqrt{2}\in\mathbb{R}$ و $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$ و $\mathbb{N}\subset\mathbb{Q}$ و $-\frac{2}{3}\notin\mathbb{R}^+$ و $\frac{2}{3}\notin\mathbb{N}$ و $\frac{6}{2}\in\mathbb{N}$ و $\frac{\sqrt{100}}{5}\in\mathbb{N}$ و $\mathbb{Q}\not\subset\mathbb{Z}$ و $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$ و $\pi\notin\mathbb{Z}$ و $0\notin\mathbb{Q}^*$ و $-\frac{7}{3}\notin\mathbb{Q}^{+*}$ و $\sqrt{16}\in\mathbb{N}$ و $0\notin\mathbb{R}^*$ و $\{1;3;-8\}\not\subset\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}^+\subset\mathbb{R}$

II. العمليات في المجموعة $\mathbb{R}$ (تذكير)

الجمع في $\mathbb{R}$: a و b و c أعداد حقيقية

$a+b=b+a$ و $a+(b+c)=(a+b)+c=a+b+c$

$a+0=0+a=a$ و $(-a)+a=a+(-a)=0$

الضرب في $\mathbb{R}$: a و b و c أعداد حقيقية

$a\times b=b\times a=ab=ba$ و $a(bc)=(ab)c=(ac)b=abc$

$a\neq 0; a\times\frac{1}{a}=1$

العمليات على الكسور: a و b و c و d أعداد حقيقية بحيث $bd\neq 0$

$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ و $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$

$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$ و $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$ و $k\times\frac{a}{b}=\frac{ak}{b}$

$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$ و $\frac{a}{\frac{b}{c}}=a\times\frac{c}{b}=\frac{ac}{b}; bc\neq 0$

الفرق في $\mathbb{R}$: $-a$ يسمى مقابل a و لدينا $a-b=a+(-b)$ و

$-(a-b)=-a+b$

انتبه: إذا كان $\begin{cases}a=b\\c=d\end{cases}$ فان: $a+c=b+d$

$\frac{1}{a}$ يسمى مقلوب العدد a حيث $a\neq 0$

العدد $\frac{a}{b}$ حيث $a\in\mathbb{R}$ و $b\in\mathbb{R}^*$ يسمى خارج العدد a على b . $\frac{a}{b}=a\times\frac{1}{b}$

a و b و c و d أعداد حقيقية حيث $bd\neq 0$ (تعني $b\neq 0$ و $d\neq 0$).

$\frac{a}{b}=c$ يكافئ $a=bc$ و $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ يكافئ $ad=bc$ و $\frac{a}{b}=0$ يكافئ $a=0$

تمرين2: أحسب وبسط : $A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}$ و $B=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2$ و

$C=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2$ و $D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}$ و $E=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)$

$F=\frac{7-\frac{4}{\pi}}{12-21\pi}$ $G=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)+(b-c)\right]$

الجواب:

$A=\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}=\frac{9}{12}+\frac{20}{12}-\frac{14}{12}=\frac{9+20-14}{12}=\frac{15}{12}=\frac{5}{4}$

$B=\frac{-2}{3}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}-2=\frac{-8}{12}+\frac{14}{12}-\frac{3}{12}-\frac{24}{12}=\frac{-8+14-3-24}{12}=\frac{-21}{12}=-\frac{7}{4}$

$C=\left(\frac{2}{3}-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{4-15}{6}\right)^2=\left(\frac{-11}{6}\right)^2=\frac{(-11)^2}{6^2}=\frac{121}{36}$

$D=\frac{5+\frac{1}{3}}{2-\frac{3}{2}}=\frac{\frac{16}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{16}{3}\times\frac{2}{1}=\frac{32}{3}$

$E=\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{5}+1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{3}{3}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{4}{10}+\frac{10}{10}-\frac{5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{4+10-5}{10}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{9}{10}\right)=\frac{2}{3}\times\frac{3\times 3}{5\times 2}=\frac{3}{5}$

$F=\frac{7-\frac{4}{\pi}}{12-21\pi}=\frac{\frac{7\pi-4}{\pi}}{\frac{12-21\pi}{1}}=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{12-21\pi}=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{12-21\pi}$

$F=\frac{7\pi-4}{\pi}\times\frac{1}{-3(7\pi-4)}=-\frac{1}{3\pi}$

$G=\left[(a-c)-(a-b)\right]-\left[(c-a)+(b-c)\right]=(a-c-a+b)-(c-a+b-c)$

$G=a-c-a+b-c+a-b+c=a-c$

III. الجذور المربعة:

تعريف: ليكن x عددا حقيقيا موجبا. نسمي جذر مربع x , العدد الحقيقي الموجب y بحيث $y^2=x$. و نكتب $y=\sqrt{x}$. و لدينا $\sqrt{x}=y$ يكافئ $x=y^2$ و $y\geq 0$.

أمثلة: $\sqrt{9}=3;\sqrt{(-7)^2}=7;\sqrt{(ab)^2}=ab$ اذا كان $ab\succ 0$

خاصية: لكل a و b من $\mathbb{R}^+$ لدينا:

$\sqrt{a}\times\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ و $\sqrt{\frac{1}{a}}=\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{\sqrt{a}}{a}; a\succ 0$ و $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}; b\succ 0$ و $\left(\sqrt{a}\right)^2=\sqrt{a^2}=a$ و $\left(\sqrt{a}\right)^n=\sqrt{a^n}; n\in\mathbb{N}^*$

اذا كان $x\geq 0$ و $y\geq 0$ فان $\sqrt{x}=\sqrt{y}$ يكافئ $x=y$.

خاصية: لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $\sqrt{x^2}=|x|$

$|x|$ تقرأ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x و لدينا : $|x|=x$ اذا كان x موجبا و $|x|=-x$ اذا كان x سالبا

مثال : $|5|=5$ و $|-7|=-(-7)=7$

تمرين3: بسط

$A=\sqrt{\frac{9}{2}}$ $B=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}$ $C=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}$

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)$ و $E=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

الجواب:

$A=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$B=\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{28}{14}}=\sqrt{2}$

$C=3\sqrt{20}+4\sqrt{45}-2\sqrt{80}-\sqrt{180}=3\sqrt{4\times 5}+4\sqrt{9\times 5}-2\sqrt{16\times 5}-\sqrt{36\times 5}$

$C=3\times 2\sqrt{5}+4\times 3\sqrt{5}-2\times 4\sqrt{5}-6\sqrt{5}=6\sqrt{5}+12\sqrt{5}-8\sqrt{5}-6\sqrt{5}=(6+12-8-6)\sqrt{5}$

$C=4\sqrt{5}$

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)=\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{5}\right)\left(\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\right)$

$D=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-5=3+2\sqrt{3\times 2}+2-5$

$D=2\sqrt{6}$

$E=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}-\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)}$

$E=\frac{\left(\sqrt{3}+\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{3}\sqrt{5}+\left(\sqrt{5}\right)^2\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}$

$$E=\frac{3+2\sqrt{15}+5-\left(3-2\sqrt{15}+5\right)}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{3+2\sqrt{15}+5-3+2\sqrt{15}-5}{\left(\sqrt{3}\right)^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{4\sqrt{15}}{-2}=-2\sqrt{15}$$

تمرين4: بين أن العدد $E=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}$ عدد صحيح نسبي

الجواب:

$$E=\frac{5\sqrt{7}}{\sqrt{2}-\sqrt{7}}+\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{7}}=\frac{\left(5\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)+-5\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{7}\right)}$$

$$E=\frac{5\sqrt{7}\sqrt{2}+5\sqrt{7}\sqrt{7}+5\sqrt{2}\sqrt{2}-5\sqrt{2}\sqrt{7}}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{35+10}{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=\frac{45}{-5}=-9\in\mathbb{Z}$$

تمرين5: أحسب وبسط :

$$A=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$$

الجواب:

$$A=\sqrt{\left(2-\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)\left(2+\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$$

$$A=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{4-\left(2+\sqrt{2}\right)}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}$$

$$A=\sqrt{2-\sqrt{2}}\times\sqrt{2+\sqrt{2}}\times\sqrt{2}=\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}\times\sqrt{2}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$$

IV. القوى و قوى العدد 10 و الكتابة العلمية:

تعريف: ليكن a عددا حقيقيا غير منعدم و $n\in\mathbb{N}$.

لدينا : $a^1=a;a^0=1$ و $a^n=\underbrace{a\times a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{n\text{ مرة}}$ و $a^{-n}=\frac{1}{a^n}$

V. العمليات على القوى:

خاصيات : لكل a و b من $\mathbb{R}^*$ و لكل m و n من $\mathbb{N}$ لدينا:

$$a^n\times b^n=(ab)^n$$

$$\left(a^n\right)^m=a^{nm}\quad\text{و}\quad a^n\times a^m=a^{n+m}$$

$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}\quad\text{و}\quad\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$$

حالة خاصة : قوى العدد 10:

$10^1=10$ و $10^0=1$ و $10^{-2}=0,01$ و $10^{-1}=0,1$

$10^n=\underbrace{1000\cdots0}_{n};n\in\mathbb{N}$ و $10^{-n}=\underbrace{0,000\cdots01}_{n};n\in\mathbb{N}$

الكتابة العلمية: كل عدد عشري x موجب يكتب على الشكل $x=a\times10^p$ حيث p ينتمي الى $\mathbb{Z}$ و a عدد عشري بحيث $1\le a\prec10$.

هذه الكتابة تسمى الكتابة العلمية.

ملحوظة: اذا كان x عددا سالبا فان كتابته العلمية هي $x=-a\times10^p$

أمثلة: المسافة بين الأرض و الشمس هي: 149597870 كلم

تكتب $1,4959787\times10^8$ كلم.

$3,25\times10^4$ هي كتابة علمية و 15×10^3 هي كتابة غير علمية

الكتابة العلمية للعدد 17000000 هي 1.7×10^7

تمرين6:: بسط أو أكتب على شكل قوى :

$$A=2^3\times\left(2^2\right)^4\times\left(2^{-5}\right)^3\qquad B=(-3)^1\times(-3)^5\times(3)^2\times(-3)^{-10}$$

$$C=\frac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\frac{9}{2^2}\qquad D=\frac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}$$

$$E=\frac{10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}}{10^{-2}\times10^3\times10^5}$$

الجواب:

$$A=2^3\times\left(2^2\right)^4\times\left(2^{-5}\right)^3=2^3\times2^{2\times4}\times2^{-5\times3}=2^{3+8-15}=2^{-4}$$

$$A=\frac{1}{2^4}=\frac{1}{16}$$

$$B=(-3)^1\times(-3)^5\times(3)^2\times(-3)^{-10}=-(3)^1\times-(3)^5\times(3)^2\times(3)^{-10}$$

$$B=3^1\times3^5\times3^2\times3^{-10}=3^{1+5+2-10}=3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$$

$$C=\frac{3^{-5}\times4^{-2}}{12^3}\times\frac{9}{2^2}=\frac{3^{-5}\times\left(2^2\right)^{-2}}{\left(3\times2^2\right)^3}\times\frac{3^2}{2^2}=\frac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}$$

$$C=\frac{3^{-5}\times(2)^{-4}\times3^2}{(3)^3\times2^6\times2^2}=3^{-5}\times2^{-4}\times3^2\times(3)^{-3}\times2^{-6}\times2^{-2}=3^{-5-3+2}\times2^{-4-6-2}$$

$$C=3^{-6}\times2^{-12}$$

$$D=\frac{(-2)^3\times\left(4^2\right)^{-1}\times8}{1024\times(-16)^{-4}}=\frac{-2^3\times4^{2\times(-1)}\times2^3}{1024\times\left(-2^3\right)^{-4}}=\frac{-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3}{2^{10}\times\left(-2^3\right)^{-4}}$$

$$D=-2^3\times\left(2^2\right)^{-2}\times2^3\times2^{-10}\times(-2)^{3\times4}=-2^{3-4+3-10+12}=-2^4=-16$$

$$E=\frac{10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}}{10^{-2}\times10^3\times10^5}=10^{-8}\times10^9\times10^7\times10^{-4}\times10^2\times10^{-3}\times10^{-5}$$

$$E=10^{-8+9+7-4+2-3-5}=10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0.01$$

VI. متطابقات هامة_النشر و التعميل القوى:

اذا كان a و b و k أعداد حقيقية فان

$$k(a+b)=ka+kb\quad\text{و}\quad k(a-b)=ka-kb$$

$$(a+b)(c-d)=ac-ad+bc-bd$$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2\quad\text{و}\quad(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)\quad\text{و}\quad a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab-b^2\right)$$

$$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\text{و}$$

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

أمثلة: أحسب وبسط حيث $x\in\mathbb{R}$:

$$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2\qquad B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2$$

$$C=\left(\sqrt{2}+1\right)^3\qquad D=(3x-2)^3\qquad E=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)$$

$$F=\left(200520052006\right)^2-\left(200520052005\times200520052007\right)$$

عندما تعجز الآلة الحاسبة

الجواب:

$$A=\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2+2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\left(\sqrt{5}\right)^2-2\sqrt{5}\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2\right)$$

$$A=5+2\sqrt{10}+2-\left(5-2\sqrt{10}+2\right)=5+2\sqrt{10}+2-5+2\sqrt{10}-2=4\sqrt{10}$$

$$B=\left[\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right]^2=\left(\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^2=(2-3)^2=(-1)^2=1$$

$$C=\left(\sqrt{2}+1\right)^3=\left(\sqrt{2}\right)^3+3\left(\sqrt{2}\right)^2\times1+3\sqrt{2}(1)^2+(1)^3=2\sqrt{2}+3\times2+3\sqrt{2}+1$$

$$C=5\sqrt{2}+7$$

$$D=(3x-2)^3=(3x)^3-3(3x)^2\times2+3\times3x\times(2)^2-(2)^3$$

$$D=27x^3-54x^2+36x-8$$

$$E=(x+2)\left(x^2-2x+4\right)=(x+2)\left(x^2-2\times x+2^2\right)=x^3+2^3=x^3+8$$

حساب: $F=\left(200520052006\right)^2-\left(200520052005\times200520052007\right)$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحداتها لتبسيط الحساب

نضع: $x=200520052006$

إذن: $200520052005=x-1$ و $200520052007=x+1$

و منه: $F=x^2-(x-1)(x+1)$

$$F = x^2 - \left(x^2 - 1\right) = x^2 - x^2 + 1 = 1$$

تمرين7: أحسب وبسط حيث $x \in \mathbb{R}$:

$$A = \left(3 + \sqrt{11}\right)^2 - \left(3 - \sqrt{11}\right)^2 \qquad B = \left(4\sqrt{3} - 7\right)^{2015} \times \left(4\sqrt{3} + 7\right)^{2015}$$

$$C = \left(\sqrt{75} - \sqrt{98}\right) \times \left(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}\right) \qquad D = (5x + 2)^3$$

$$E = \left(\sqrt{3} - 1\right)^3 \qquad F = (2x - 3)\left(4x^2 + 6x + 9\right)$$

$$G = \left(2015200052004\right)^2 - \left(2015200052002 \times 2015200052006\right)$$

الجواب:

$$A = \left(\sqrt{3} + \sqrt{11}\right)^2 - \left(\sqrt{3} - \sqrt{11}\right)^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2\sqrt{3}\sqrt{11} + \left(\sqrt{11}\right)^2 - \left(\left(\sqrt{3}\right)^2 - 2\sqrt{3}\sqrt{11} + \left(\sqrt{11}\right)^2\right)$$

$$A = 3 + 2\sqrt{33} + 11 - \left(3 - 2\sqrt{33} + 11\right) = 3 + 2\sqrt{33} + 11 - 3 + 2\sqrt{33} - 11 = 4\sqrt{33}$$

$$B = \left(\left(4\sqrt{3} - 7\right)\left(4\sqrt{3} + 7\right)\right)^{2015} = \left(\left(4\sqrt{3}\right)^2 - (7)^2\right)^{2015} = (48 - 49)^{2015} = (-1)^{2015} = -1$$

$$C = \left(\sqrt{75} - \sqrt{98}\right) \times \left(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{25 \times 3} - \sqrt{49 \times 2}\right) \times \left(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}\right)$$

$$C = \left(5\sqrt{3} - 7\sqrt{2}\right) \times \left(5\sqrt{3} + 7\sqrt{2}\right) = \left(5\sqrt{3}\right)^2 - \left(7\sqrt{2}\right)^2 = 75 - 98 = 75 - 98 = -23$$

$$D = (5x + 2)^3 = (5x)^3 + 3(5x)^2 \times 2 + 3 \times 5x \times (2)^2 + (2)^3$$

$$D = 125x^3 + 150x^2 + 60x + 8$$

$$E = \left(\sqrt{3} - 1\right)^3 = \left(\sqrt{3}\right)^3 - 3\left(\sqrt{3}\right)^2 \times 1 + 3 \times \sqrt{3} \times (1)^2 - (1)^3$$

$$E = 3\sqrt{3} - 9 + 3 \times \sqrt{3} - 1 = 6\sqrt{3} - 10$$

$$F = (2x - 3)\left(4x^2 + 6x + 9\right) = (2x - 3)\left((2x)^2 + 2x \times 3 + 3^2\right) = (2x)^3 - 3^3 = 8x^3 - 27$$

حساب:

$$G = \left(2015200052004\right)^2 - \left(2015200052002 \times 2015200052006\right)$$

نلاحظ أن الأعداد الثلاثة تختلف فقط في رقم وحداتها لتبسيط الحساب

نضع: $x = 2015200052004$

إذن: $x - 2 = 2015200052002$ و $x + 2 = 2015200052006$

و منه: $G = x^2 - (x - 2)(x + 2)$

$$G = x^2 - \left(x^2 - 4\right) = x^2 - x^2 + 4 = 4$$

تمرين8: أتمم الفراغات التالية :

$10 - 4\sqrt{6} = (\quad - \quad)^2$ و $4 + 2\sqrt{3} = (\quad + \quad)^2$

الجواب:

$$4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2 \times \sqrt{3} \times 1 = 3 + 2 \times \sqrt{3} \times 1 + 1 = \left(\sqrt{3}\right)^2 + 2 \times \sqrt{3} \times 1 + (1)^2$$

$$4 + 2\sqrt{3} = \left(\sqrt{3} + 1\right)^2$$

$$10 - 4\sqrt{6} = 10 - 2 \times 2 \times \sqrt{6} = (2)^2 + 2 \times \sqrt{6} \times 2 + \left(\sqrt{6}\right)^2$$

$$10 - 4\sqrt{6} = \left(2 - \sqrt{6}\right)^2$$

تمرين9: $a \in \mathbb{R}^*$ $b \in \mathbb{R}^*$ و $a \geq b$

بين أن : $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b}\right)$

الجواب:

لكي نبين أن عددين موجبين متساويين يكفي أن نبين أن مربعيهما متساويين

$$\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 = a + \sqrt{a^2 - b^2}$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b}\right)\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \left(\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b}\right)^2$$

$$= \frac{2}{4} \times \left(\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \left(\left(\sqrt{a - b}\right)^2 + 2\sqrt{a - b}\sqrt{a + b} + \left(\sqrt{a + b}\right)^2\right)$$

$$= \frac{2}{4} \times \left(\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b}\right)^2 = \frac{1}{2} \times \left(a - b + 2\sqrt{(a - b)(a + b)} + a + b\right)$$

$$= \frac{1}{2} \times \left(2a + 2\sqrt{(a - b)(a + b)}\right) = a + \sqrt{(a - b)(a + b)} = a + \sqrt{a^2 - b^2}$$

إذن وجدنا: $\left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b}\right)\right)^2$

ومنه : $\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{a - b} + \sqrt{a + b}\right)$

تمرين10: عمل التعابير التالية: $A = 16x^2 - 8x + 1$ $B = 16 - 25x^2$

$$C = 1 - (1 - 3x)^2 \quad D = (2x - 1)^3 - 8 \quad E = 27 + x^3$$

$$F = x^{12} - 2x^6 + 1 \quad G = x^5 + x^3 - x^2 - 1 \quad H = x^3 + 1 + 2\left(x^2 - 1\right) - (x + 1)$$

الجواب:

$$A = 16x^2 - 8x + 1 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 1 + 1^2 = (4x - 1)^2$$

$$B = 16 - 25x^2 = (4)^2 - (5x)^2 = (4 - 5x)(4 + 5x)$$

$$C = 1 - (1 - 3x)^2 = 1^2 - (1 - 3x)^2 = (1 - (1 - 3x))(1 + (1 - 3x))$$

$$C = (1 - 1 + 3x)(1 + 1 - 3x) = 3x(2 - 3x)$$

$$D = (2x - 1)^3 - 8 = (2x - 1)^3 - 2^3 =$$

$$D = ((2x - 1) - 2)\left((2x - 1)^2 + (2x - 1) \times 2 + 2^2\right)$$

حسب المتطابقة التالية : $a^3 - b^3 = (a - b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$

$$D = (2x - 3)\left((2x)^2 - 4x + 1 + 4x - 2 + 4\right) = (2x - 3)\left(4x^2 + 3\right)$$

$$E = 27 + x^3 = 3^3 + x^3 = (3 + x)\left(3^2 - 3x + x^2\right)$$

$$E = (3 + x)\left(9 - 3x + x^2\right)$$

$$F = \left(x^6\right)^2 - 2x^6 + 1 = \left(x^6\right)^2 - 2x^6 \times 1 + 1^2 = \left(x^6 - 1\right)^2$$

$$G = x^5 + x^3 - x^2 - 1 = x^3\left(x^2 + 1\right) - \left(x^2 + 1\right) = \left(x^3 - 1\right)\left(x^2 + 1\right)$$

$$H = x^3 + 1 + 2\left(x^2 - 1\right) - (x + 1) = x^3 + 1^3 + 2\left(x^2 - 1^2\right) - (x + 1)$$

$$H = (x + 1)\left(x^2 - x + 1^2\right) + 2(x + 1)(x - 1) - (x + 1)$$

$$H = (x + 1)\left(x^2 - x + 1 + 2(x - 1) - 1\right) = (x + 1)\left(x^2 - x + 1 + 2x - 2 - 1\right)$$

$$H = (x + 1)\left(x^2 + x - 2\right)$$

انتهى الدرس :

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient

ملاحظات عامة حول الدرس :

التعميل هو كتابة مجموع على شكل جذاء