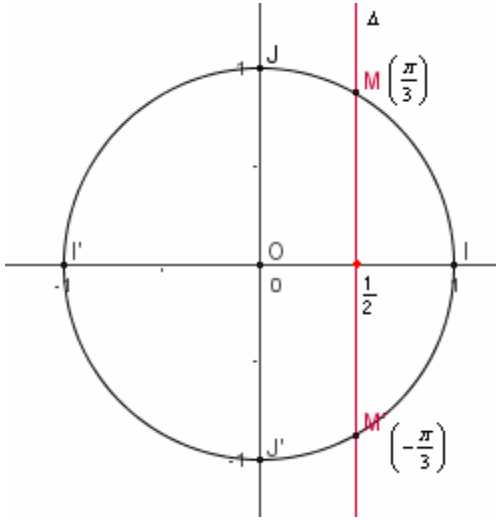


الحساب المثلثي - الجزء 2-

الدورة الثانية	الدرس الأول عدد الساعات: 15	القدرات المنتظرة التمكن من تمثيل وقراءة حلول معادلة أو متراجحة مثلثية على الدائرة المثلثية
----------------	--------------------------------	--



I- المعادلات المثلثية

1- المعادلة $\cos x = a$

مثال 1 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $x \in \mathbb{R}$

لدينا المستقيم $\Delta: x = \frac{\pi}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية

في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين على التوالي هما $\frac{\pi}{3}$ و $-\frac{\pi}{3}$.

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصل المنحنية للنقطة M

و $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصل المنحنية للنقطة M'

فإننا نستنتج أن $\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{إذن}$$

مثال 2 حل $\cos x = \frac{1}{2}$ $x \in [-2\pi; 2\pi]$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$\cos x = \frac{1}{2}$ تكافئ $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ أو $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi; 2\pi]$

فان $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ أو $-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$

لدينا $-2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ تكافئ $-\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{5}{6}$ تكافئ $k = 0$ أو $k = -1$

ومنه $x = \frac{\pi}{3}$ أو $x = -\frac{5\pi}{3}$

لدينا $-2\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi$ تكافئ $-\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{7}{6}$ تكافئ $k = 0$ أو $k = 1$

ومنه $x = -\frac{\pi}{3}$ أو $x = \frac{5\pi}{3}$

إذن $S = \left\{ -\frac{5\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right\}$

خلاصة * المعادلة $\cos x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a < -1$ ∨ $a > 1$

* $\cos x = 1$ $x \in \mathbb{R}$ إذا فقط إذا كان $x = 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

* $\cos x = -1$ $x \in \mathbb{R}$ إذا فقط إذا كان $x = \pi + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

* إذا كان $-1 < a < 1$ فإن يوجد عنصر α من $]0; \pi[$ حيث $\cos \alpha = a$

و بالتالي حلول المعادلة $\cos x = a$ في \mathbb{R} هي $x = \alpha + 2k\pi$ أو $x = -\alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$S = \{ \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ -\alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$

تمرين حل المعادلات

$$x \in \mathbb{R} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x) \quad x \in]-\pi; 3\pi] \quad \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x \in [\pi; 2\pi[\quad 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0$$

الحل

$$x \in \mathbb{R} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x) \quad \text{نحل}^*$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } 2x = -x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x = x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{تكافئ} \quad \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2x)$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } 3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{تكافئ}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{تكافئ}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{إذن}$$

$$x \in]-\pi; 3\pi] \quad \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{نحل}^*$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ومنه} \quad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{و بالتالي} \quad \cos\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{تكافئ} \quad 2x - \frac{3\pi}{4} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x - \frac{3\pi}{4} = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{حيث}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } 2x = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x = \frac{19\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{تكافئ}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \quad \text{أو} \quad x = \frac{19\pi}{24} + k\pi \quad \text{تكافئ}$$

و حيث $x \in]-\pi; 3\pi]$ فان

$$\text{من أجل} \quad x = \frac{19\pi}{24} + k\pi \quad \text{لدينا} \quad -\pi < \frac{19\pi}{24} + k\pi \leq 3\pi \quad \text{أي} \quad -1 < \frac{19}{24} + k \leq 3$$

$$\text{ومنه} \quad -\frac{43}{24} < k \leq \frac{53}{24}$$

و حيث $k \in \mathbb{Z}$ فان $k = -1$ أو $k = 0$ أو $k = 1$ أو $k = 2$

$$\text{إذن} \quad x = \frac{19\pi}{24} + 2\pi = \frac{67\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = \frac{19\pi}{24} + \pi = \frac{43\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = \frac{19\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = \frac{19\pi}{24} - \pi = -\frac{5\pi}{24}$$

$$\text{من أجل} \quad x = -\frac{\pi}{24} + k\pi \quad \text{لدينا} \quad -\pi < -\frac{\pi}{24} + k\pi \leq 3\pi \quad \text{أي} \quad -1 < -\frac{1}{24} + k \leq 3$$

$$\text{ومنه} \quad -\frac{23}{24} < k \leq \frac{73}{24}$$

و حيث $k \in \mathbb{Z}$ فان $k = 0$ أو $k = 1$ أو $k = 2$ أو $k = 3$

$$\text{إذن} \quad x = -\frac{\pi}{24} + 0 \cdot \pi = -\frac{\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{24} + \pi = \frac{23\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{24} + 2\pi = \frac{47\pi}{24} \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{24} + 3\pi = \frac{71\pi}{24}$$

$$S = \left\{ -\frac{5\pi}{24}, -\frac{\pi}{24}, \frac{19\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}, \frac{43\pi}{24}, \frac{47\pi}{24}, \frac{67\pi}{24}, \frac{71\pi}{24} \right\} \quad \text{إذن}$$

$$x \in [\pi; 2\pi[\quad 2 \cos^2 x + 3 \cos x + 1 = 0 \quad \text{نحل}^*$$

$$\text{نضع} \quad \cos x = X \quad \text{المعادلة تصبح} \quad 2X^2 + 3X + 1 = 0$$

ليكن Δ مميز المعادلة

$$\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$$

$$X = \frac{-3-1}{4} = -1 \text{ أو } X = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2} \text{ ومنه}$$

$$\cos x = -1 \text{ أو } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ وبالتالي}$$

$$k \in \mathbb{Z} / x = \pi + 2k\pi \text{ تكافئ } \cos x = -1 \text{ لدينا}$$

$$\text{و حيث } x \in [\pi; 2\pi[\text{ فان } \pi \leq \pi + 2k\pi < 2\pi \text{ أي } 0 \leq k < \frac{1}{2} \text{ ومنه } k = 0 \text{ اذن } x = \pi$$

$$\text{لدينا } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ أي } \cos x = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{ومنه } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{و حيث } x \in [\pi; 2\pi[\text{ فان}$$

$$\text{من أجل } x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ لدينا } \pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi \text{ أي } \frac{5}{6} \leq k < \frac{4}{3} \text{ ومنه } k = 1$$

$$\text{إذن } x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{من أجل } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ لدينا } \pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < 2\pi \text{ أي } \frac{1}{6} \leq k < \frac{2}{3} \text{ لا يوجد عدد صحيح نسبي}$$

يحقق المتفاوتة الأخيرة

$$\text{إذن } S = \left\{ \pi, \frac{4\pi}{3} \right\}$$

-2 المعادلة $\sin x = a$

$$\text{مثال 1 حل } x \in \mathbb{R} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

لدينا المستقيم $\Delta: y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ يقطع الدائرة المثلثية

في نقطتين M و M' أفصوليهما المنحنيين الرئيسيين

$$\text{على التوالي هما } \frac{\pi}{3} \text{ و } \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

بما أن $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصل المنحنية

للنقطة M و $\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ بحيث $k \in \mathbb{Z}$ هي الأفاصل

المنحنية للنقطة M' فإننا نستنتج أن

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ تكافئ } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

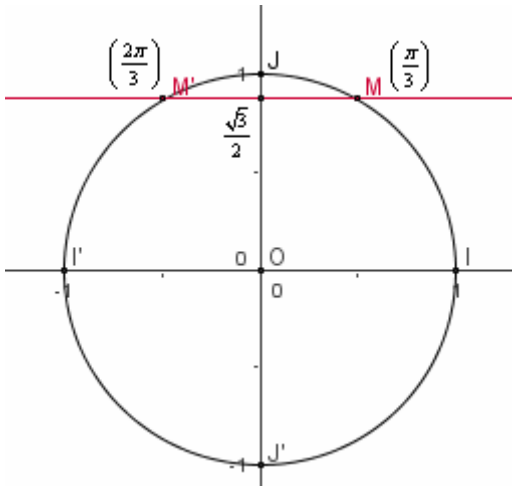
$$\text{إذن } S = \left\{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{مثال 2 حل } x \in [-2\pi; 3\pi] \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نتبع نفس الخطوات السابقة فنحصل على

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ تكافئ } x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ أو } x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

وحيث أننا نحل المعادلة في المجال $[-2\pi; 3\pi]$



$$-2\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \quad \text{أو} \quad -2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \quad \text{فان}$$

$$-\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{8}{6} \quad \text{تكافئ} \quad -2\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \quad \text{لدينا}$$

$$k = 1 \quad \text{أو} \quad k = 0 \quad \text{أو} \quad k = -1 \quad \text{تكافئ}$$

$$x = -\frac{5\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{7\pi}{3} \quad \text{ومنهم}$$

$$-\frac{8}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \quad \text{تكافئ} \quad -2\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq 3\pi \quad \text{لدينا} \quad \text{لدينا}$$

$$k = 1 \quad \text{أو} \quad k = 0 \quad \text{أو} \quad k = -1 \quad \text{تكافئ}$$

$$x = -\frac{4\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{2\pi}{3} \quad \text{أو} \quad x = \frac{8\pi}{3} \quad \text{ومنهم}$$

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{3}, \frac{-4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{7\pi}{3}, \frac{8\pi}{3} \right\} \quad \text{إذن}$$

خلاصة المعادلة $\sin x = a$ لا تقبل حلا إذا كان $a < -1 \vee a > 1$

$$k \in \mathbb{Z} / \quad x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \sin x = 1$$

$$k \in \mathbb{Z} / \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \quad \sin x = -1$$

إذا كان $-1 < a < 1$ فان يوجد عنصر α من $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ حيث $\sin \alpha = a$

حلول المعادلة $\sin x = a$ في \mathbb{R} هي $x = \alpha + 2k\pi$ أو $x = \pi - \alpha + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

$$S = \{ \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \pi - \alpha + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x) \quad \text{تمرين حل المعادلات}$$

$$x \in]-\pi; 2\pi] \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

الحل

$$x \in \mathbb{R} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x) \quad \text{نحل}$$

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \quad \text{تكافئ} \quad \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos(3x)$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} - 3x + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{2} + 3x + 2k\pi \quad \text{حيث}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad -x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 5x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{حيث}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad x = \frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}k\pi \quad \text{أو} \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2(-k)\pi \quad \text{حيث}$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{30} + \frac{2}{5}k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2(-k)\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \text{إذن}$$

$$x \in]-\pi; 2\pi] \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} \quad \text{نحل}$$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \quad \text{تكافئ} \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$k \in \mathbb{Z} \quad \text{تكافئ} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{أو} \quad 2x - \frac{\pi}{4} = \pi + \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{حيث}$$

$$\text{تكافئ } 2x = \frac{17\pi}{12} + 2k\pi \text{ أو } 2x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{تكافئ } x = \frac{17\pi}{24} + k\pi \text{ أو } x = \frac{\pi}{24} + k\pi \text{ حيث } k \in \mathbb{Z}$$

وحيث أن $x \in]-\pi; 2\pi]$ فإن

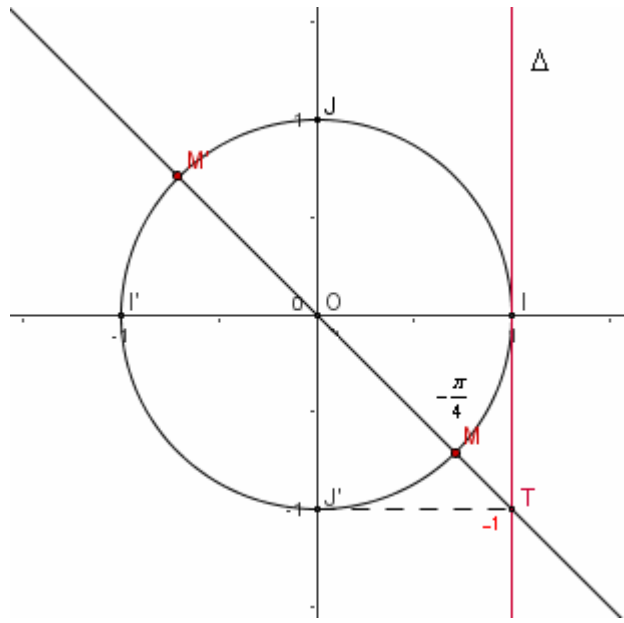
$$\text{من أجل } x = \frac{\pi}{24} + k\pi \text{ لدينا } -\pi < \frac{\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi \text{ أي } -\frac{25}{24} < k \leq \frac{47}{24} \text{ ومنه } k = -1 \text{ أو } k = 0 \text{ أو } k = 1$$

$$\text{إذن } x = \frac{\pi}{24} + \pi = \frac{25\pi}{24} \text{ أو } x = \frac{\pi}{24} \text{ أو } x = \frac{\pi}{24} - \pi = -\frac{23\pi}{24}$$

$$\text{من أجل } x = \frac{17\pi}{24} + k\pi \text{ لدينا } -\pi < \frac{17\pi}{24} + k\pi \leq 2\pi \text{ ومنه } -\frac{41}{24} < k \leq \frac{31}{24} \text{ ومنه } k = -1 \text{ أو } k = 0 \text{ أو } k = 1$$

$$\text{إذن } x = \frac{17\pi}{24} + \pi = \frac{41\pi}{24} \text{ أو } x = \frac{17\pi}{24} \text{ أو } x = \frac{17\pi}{24} - \pi = -\frac{7\pi}{24}$$

$$\text{ومنه } S = \left\{ -\frac{23\pi}{24}; -\frac{7\pi}{24}; \frac{\pi}{24}; \frac{17\pi}{24}; \frac{25\pi}{24}; \frac{41\pi}{24} \right\}$$



-3 المعادلة $\tan x = a$

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{حل المعادلة } \tan x = -1$$

نعتبر Δ المماس الدائرة المثلثية (C) في أصلها I ،
نأخذ النقطة T من Δ حيث -1 أفصول T في المحور Δ

المستقيم (OT) يقطع الدائرة المثلثية (C)

$$\text{في النقطتين } M \text{ و } M' \text{ نعلم أن } \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$$

و بالتالي $-\frac{\pi}{4}$ أفصول منحنى للنقطة M

$$\text{وبما أن } \tan(x + k\pi) = \tan x \text{ لكل } x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{فان حلول المعادلة هي } x = \frac{-\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{اذن } S = \left\{ \frac{-\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

خاصة

$$\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad \tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi \quad / k \in \mathbb{Z} \quad \text{حيث } \alpha \text{ حل للمعادلة } \tan x = a \text{ في } \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

تمرين حل المعادلتين

$$x \in [0; 3\pi] \quad \tan 2x = \sqrt{3}$$

$$x \in \mathbb{R} \quad \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan x$$

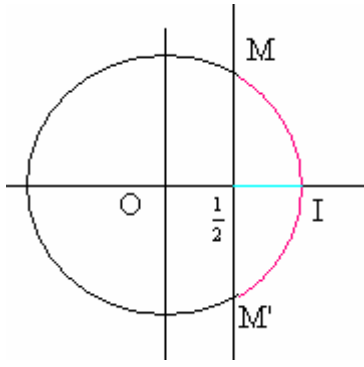
-II المراجعات المثلثية

مثال 1

$$\text{حل } x \in]-\pi; \pi] \quad \cos x \geq \frac{1}{2}$$

$$\text{نحل أولا المعادلة } \cos x = \frac{1}{2} \quad x \in]-\pi; \pi]$$

بإتباع خطوات حل المعادلات نحصل على

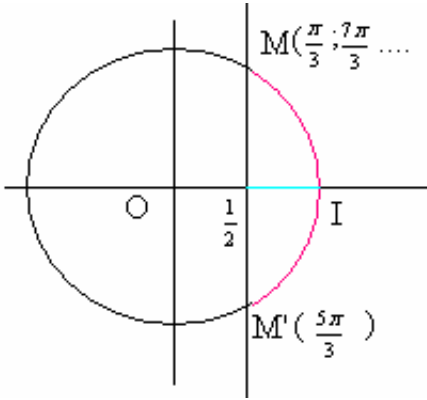


$$x = -\frac{\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{\pi}{3} \text{ تكافئ } x \in]-\pi; \pi[\quad \cos x = \frac{1}{2}$$

لنكن $M \left(\frac{\pi}{3} \right)$ و $M' \left(-\frac{\pi}{3} \right)$ نقطتين من الدائرة المثلثية

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصل المنحنية للنقط (C) التي تنتمي إلى القوس $\widehat{M'IM}$ في $]-\pi; \pi[$

$$S = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right] \text{ هي المجموعة هي}$$



$$x \in [0; 3\pi[\quad \cos x \geq \frac{1}{2} \text{ حل **مثال 2** }]$$

$$x \in [0; 3\pi[\quad \cos x = \frac{1}{2} \text{ نحل أولا المعادلة}$$

$$x \in [0; 3\pi[\quad \cos x = \frac{1}{2} \text{ تكافئ } x = \frac{\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{7\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{5\pi}{3}$$

$\frac{\pi}{3}$ و $\frac{7\pi}{3}$ أفصولين منحنيين لنفس النقطة M ،

نعتبر $\frac{5\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة M'

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصل المنحنية للنقط (C)

التي تنتمي إلى القوس $\widehat{M'IM}$ في $[0; 3\pi[$

$$S = \left[0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; \frac{7\pi}{3} \right] \text{ هي المجموعة هي}$$

مثال 3

$$x \in [0; 2\pi] \quad \tan x \geq \sqrt{3} \text{ حل}$$

$$x \in [0; 2\pi] \quad \tan x = \sqrt{3} \text{ نحل المعادلة}$$

$$x \in [0; 2\pi] \quad \tan x = \sqrt{3} \text{ تكافئ } x = \frac{\pi}{3} \text{ أو } x = \frac{4\pi}{3}$$

نعتبر $\frac{\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة A

و $\frac{4\pi}{3}$ أفصول منحني للنقطة B

مجموعة حلول المتراجحة هي مجموعة الأفاصل المنحنية للنقط (C) التي تنتمي إلى اتحاد القوسين \widehat{AJ} و $\widehat{BJ'}$

في $[0; 2\pi]$

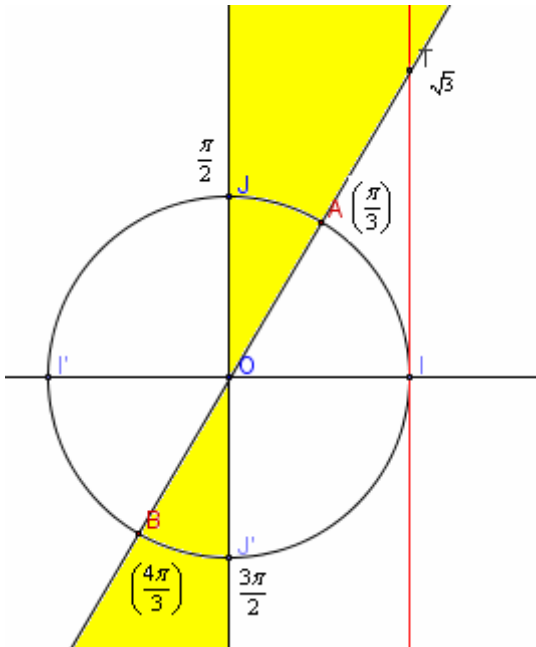
$$S = \left[\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2} \right] \cup \left[\frac{4\pi}{3}; \frac{3\pi}{2} \right] \text{ هي المجموعة هي}$$

تمرين

$$x \in]-\pi; \pi[\quad \sin x > \frac{-1}{2} \text{ حل}$$

$$x \in]0; 4\pi[\quad \sin x > \frac{-1}{2}$$

$$x \in [0; 2\pi] \quad \tan x < 1$$



مراجحات تؤول في حلها الى مراجحات أساسية

تمرين

حل

$$x \in [-\pi; \pi] \quad \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{1}{2}$$

$$x \in [0; \pi] \quad \tan 3x > \sqrt{3}$$

$$x \in]-\pi; \pi] \quad 4 \cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2}) \cos x + \sqrt{2} \leq 0$$

$$x \in]-\pi; \pi] \quad \frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0$$

III- الزوايا المحيطية - الرباعيات الدائرية

1- تعريف

- **الزاوية المركزية** : هي زاوية رأسها مركز الدائرة
- **الزاوية المحيطية** : هي زاوية ينتمي رأسها للدائرة وتحصر بين ضلعيها قوسا من هذه الدائرة

2- خاصيات

نشاط 1

لتكن (C) دائرة مركزها O نعتبر A و B نقطتين مختلفتين من (C) غير متقابلتين قطريا

و M نقطة من (C) بحيث \widehat{AOB} و \widehat{AMB} تحصران نفس القوس \widehat{AB}

1- بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$ في الحالات التالية

أ/ M و O و A مستقيمة

ب/ M و O و A غير مستقيمة

يمكن اعتبار نقطة N من (C) حيث N و O و M مستقيمة

و باستعمال أ/ مرتين بين المطلوب

2- نعتبر (AT) المماس للدائرة (C). الزاوية \widehat{BAT} محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره الزاوية

المركزية \widehat{AOB}

بين أن $\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB}$

الحل

1- أ/ M و O و A مستقيمة

المثلث OBM متساوي الساقين في الرأس O

$$\text{ومنه } \widehat{BOM} = \pi - 2\widehat{BMO}$$

و حيث $\widehat{BOM} = \pi - \widehat{AOB}$ لأن M و O و A مستقيمة

$$\text{فان } \widehat{AOB} = 2\widehat{BMO}$$

$$\text{اذن } \widehat{AOB} = 2\widehat{AMB}$$

ب/ M و O و A غير مستقيمة

N من (C) حيث N و O و M مستقيمة

$$\text{حسب أ/ لدينا } \widehat{NOB} = 2\widehat{NMB}$$

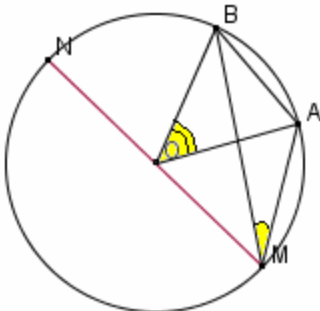
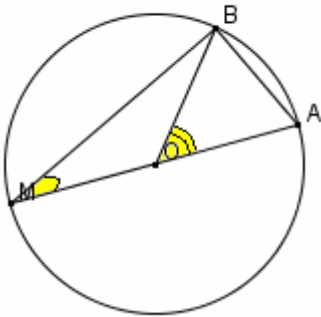
لدينا OAM مثلث متساوي الساقين في الرأس O

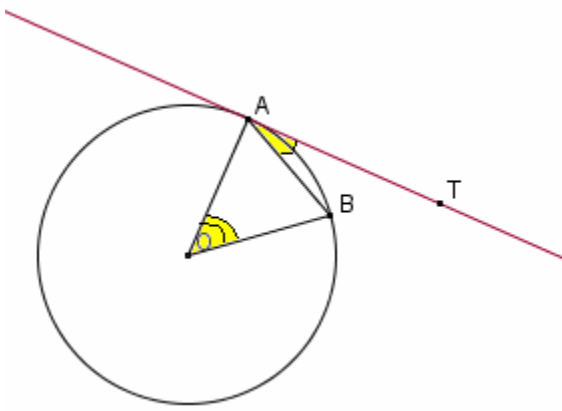
$$\text{ومنه } \widehat{AOM} = \pi - 2\widehat{AMO}$$

$$\text{لدينا } \widehat{AOB} = \pi - (\widehat{NOB} + \widehat{AOM})$$

$$\text{ومنه } \widehat{AOB} = \pi - (2\widehat{NMB} + \pi - 2\widehat{AMO})$$

$$\widehat{AOB} = 2(\widehat{AMO} - \widehat{NMB})$$





$$\widehat{AOB} = 2\widehat{AMB} \text{ إذن}$$

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB} \text{ بين أن /2}$$

$$\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BAT} \text{ ومنه (C) المماس للدائرة (C)}$$

لدينا OAB متساوي الساقين في الرأس O

$$\widehat{OAB} = \pi - 2\widehat{OAB} \text{ ومنه}$$

$$\widehat{OAB} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BAT}\right) \text{ و بالتالي}$$

$$\widehat{AOB} = 2\widehat{TAB} \text{ إذن}$$

خاصية 1

قياس زاوية مركزية في دائرة هو ضعف قياس زاوية محيطية تحصر نفس القوس التي تحصره هذه الزاوية المركزية

نشاط 2

لتكن A و B و C و D نقط مختلفة من دائرة (C) مركزها O

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \text{ أو } \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi \text{ بين أن}$$

خاصية 2

A و B و C ثلاث نقط من دائرة (C) و D نقط مختلفة من المستوى

$$\widehat{ABC} = \widehat{ADC} \text{ أو } \widehat{ABC} + \widehat{ADC} = \pi \text{ تكون } D \text{ من الدائرة (C) إذا و فقط إذا كان}$$

3- علاقات الجيب في مثلث

نشاط 3

ليكن ABC مثلثا و R شعاع الدائرة المحيطة بالمثلث ABC

$$\text{بين أن } \frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R \text{ في الحالات التالية}$$

أ/ ABC قائم الزاوية في A

ب/ جميع زوايا المثلث ABC حادة

ج/ إحدى زوايا المثلث ABC منفرجة

الجواب

أ/ ABC قائم الزاوية في A

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = BC = 2R \text{ ومنه } \sin \hat{A} = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

$$\frac{AC}{\sin \hat{B}} = 2R \text{ ومنه } \sin \hat{B} = \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{2R}$$

$$\frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R \text{ ومنه } \sin \hat{C} = \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{2R}$$

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = \frac{AC}{\sin \hat{B}} = \frac{AB}{\sin \hat{C}} = 2R \text{ إذن}$$

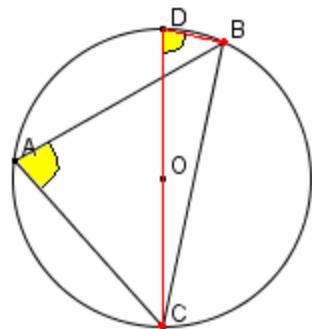
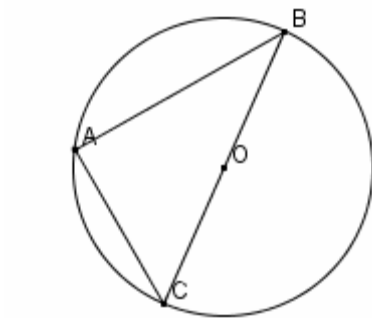
ب/ جميع زوايا المثلث ABC حادة

نعتبر D نقطة مقابلة قطريا مع C

DBC قائم الزاوية في B

لدينا $\hat{D} \equiv \hat{A}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$$\frac{BC}{\sin \hat{A}} = 2R \text{ إذن } \frac{BC}{\sin \hat{D}} = 2R \text{ ومنه } \sin \hat{D} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{2R}$$



لدينا DAC قائم الزاوية في A

و $\widehat{CDA} \equiv \widehat{B}$ زاويتان محيطيتان تحصران نفس القوس

$$\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R \quad \text{إذن} \quad \sin \widehat{B} = \frac{AC}{2R} \quad \text{ومنه} \quad \sin \widehat{CDA} = \frac{AC}{DC} = \frac{AC}{2R}$$

بالمثل نعتبر نقطة مقابلة قطريا مع A و نبين $\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R \quad \text{إذن}$$

ج/ إحدى زوايا المثلث ABC منفرجة

لنفترض أن \widehat{A} منفرجة

نعتبر D نقطة مقابلة قطريا مع C

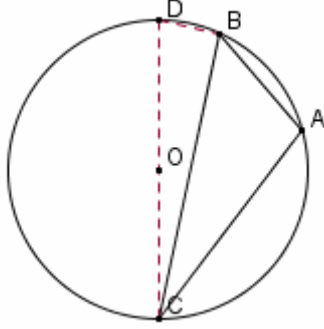
\widehat{D} و \widehat{A} متكاملتان ومن $\sin \widehat{D} = \sin \widehat{A}$

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = 2R \quad \text{إذن} \quad \frac{BC}{\sin \widehat{D}} = 2R \quad \text{ومنه} \quad \sin \widehat{D} = \frac{BC}{DC} = \frac{BC}{2R}$$

الزاويتان \widehat{C} و \widehat{B} حادتان

$$\frac{AC}{\sin \widehat{B}} = 2R \quad \text{و} \quad \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R \quad \text{نحصل على}$$

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R \quad \text{إذن}$$



خاصية

ليكن ABC مثلثا و R شعاع الدائرة المحيطة به

$$\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{AC}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$$

4- علاقات في المثلث (المساحة - المحيط)

نشاط

ليكن ABC مثلثا و H المسقط العمودي لـ A على (BC) و S مساحته

$$1- \text{بين أن} \quad S = \frac{1}{2} (BC \times AC \times \sin \widehat{C})$$

2- ليكن r شعاع الدائرة المحاطة بالمثلث ABC و O مركزها

أ/ أحسب مساحة AOC بدلالة r و AC

ب/ بين أن $S = \frac{1}{2} p \times r$ حيث p محيط المثلث ABC

خاصية

ليكن ABC مثلثا و r شعاع الدائرة المحاطة به و S مساحته p محيطه

$$S = \frac{1}{2} (BC \times AC \times \sin \widehat{C})$$

$$S = \frac{1}{2} p \times r$$