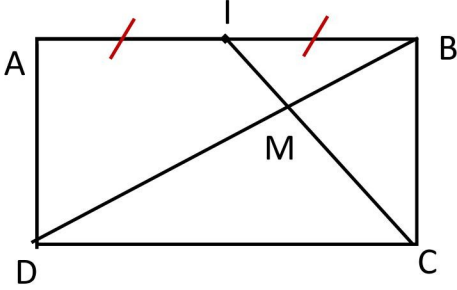


**تمرين 1:**  $ABCD$  مستطيل،  $I$  منتصف  $[AB]$ ،  $[IC]$  و  $[BD]$  تتقاطعان في النقطة  $M$



لدينا في المثلث  $MDC$ :

$$B \in (MD) \text{ و } I \in (MC) \quad \triangleright$$

$$(IB) \parallel (DC) \quad \triangleright \text{ (لأن } ABCD \text{ مستطيل)}$$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{MI}{MC} = \frac{IB}{DC}$$

$$\text{وبما أن } I \text{ منتصف } [AB] \text{، فإن: } \frac{IB}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\text{منه: } \frac{MB}{MD} = \frac{1}{2} \text{ أي } MB = \frac{1}{2} MD$$

وبما أن المتجهتان  $\vec{MB}$  و  $\vec{MD}$  مستقيمتان ولهما منحنيان

$$\text{متعاكسان فإن: } \vec{MB} = -\frac{1}{2} \vec{MD}$$

1

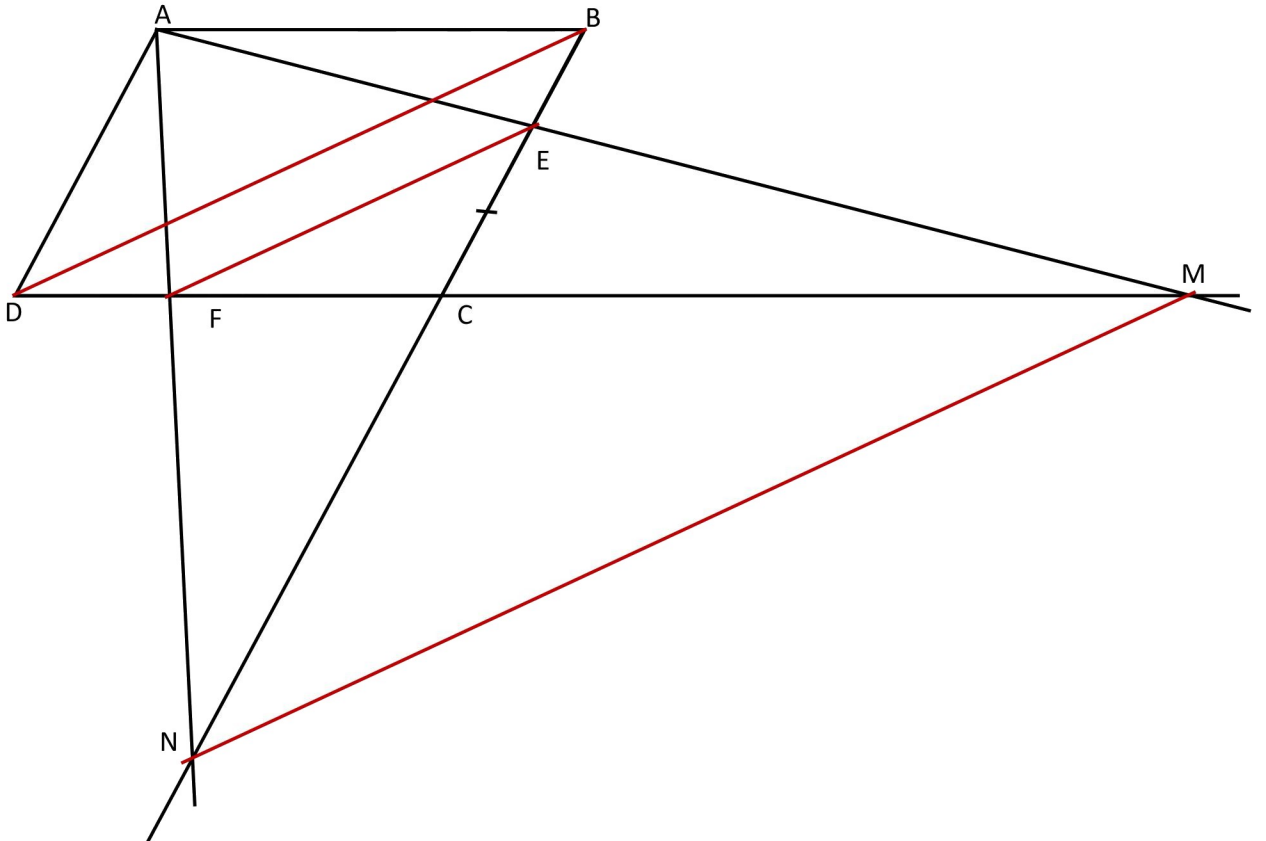
$$\text{لدينا: } \vec{MB} = -\frac{1}{2} \vec{MD} \text{ منه: } \vec{MB} = -\frac{1}{2} (\vec{MB} + \vec{BD}) \text{ أي } \vec{MB} = -\frac{1}{2} \vec{MB} - \frac{1}{2} \vec{BD} \text{ أي } \vec{MB} + \frac{1}{2} \vec{MB} = -\frac{1}{2} \vec{BD}$$

$$\text{أي } \left(1 + \frac{1}{2}\right) \vec{MB} = -\frac{1}{2} \vec{BD} \text{ أي } \frac{3}{2} \vec{MB} = -\frac{1}{2} \vec{BD} \text{ منه: } 3\vec{MB} = -2\vec{BD} = 2\vec{DB} \text{ بالتالي: } \vec{BM} = \frac{1}{3} \vec{BD}$$

2

لاإثبات استقامية متجهتين نبين أن إحداهما تساوي جذاء الأخرى في عدد حقيقي

**تمرين 2:**  $ABCD$  متوازي أضلاع.



لدينا في المثلث EMC :

$C \in (BE)$  و  $M \in (AE)$  ➤

$(MC) \parallel (AB)$  (لأن  $ABCD$  متوازي أضلاع) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :  $\frac{AE}{AM} = \frac{BE}{BC}$  وبما أن :  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$  فإن  $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$

إذن  $\frac{AE}{AM} = \frac{1}{3}$  ، وبما أن المتجهتان  $\overrightarrow{AM}$  و  $\overrightarrow{AE}$  مستقيمتان و لهما نفس المنحى فإن :  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AM}$

لدينا في المثلث BCD :

$F \in (DC)$  و  $E \in (BC)$  ➤

$(EF) \parallel (DB)$  (معطيات) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :  $\frac{DF}{DC} = \frac{BE}{BC}$  وبما أن :  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}$  فإن  $\frac{BE}{BC} = \frac{1}{3}$

إذن  $\frac{DF}{DC} = \frac{1}{3}$  ، وبما أن المتجهتان  $\overrightarrow{DC}$  و  $\overrightarrow{DF}$  مستقيمتان و لهما نفس المنحى فإن :  $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$

لدينا في المثلث ADF :

$N \in (AF)$  و  $C \in (DF)$  ➤

$(NC) \parallel (AD)$  (لأن  $ABCD$  متوازي أضلاع) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :  $\frac{AF}{AN} = \frac{DF}{DC}$  وبما أن :  $\overrightarrow{DF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{DC}$  فإن  $\frac{DF}{DC} = \frac{1}{3}$

إذن  $\frac{AF}{AN} = \frac{1}{3}$  ، وبما أن المتجهتان  $\overrightarrow{AN}$  و  $\overrightarrow{AF}$  مستقيمتان و لهما نفس المنحى فإن :  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AN}$

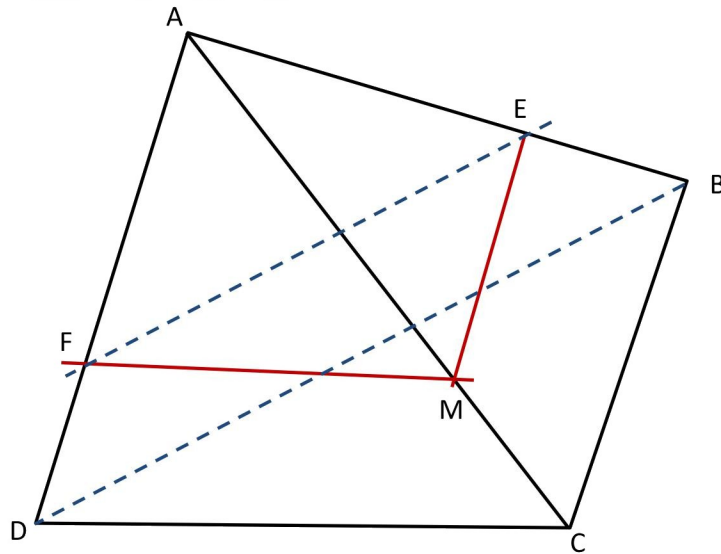
لنبين أن :  $(EF) \parallel (MN)$

لدينا  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AM}$  و  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AN}$  إذن :  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{MA} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{MN}$

بالتالي المتجهتان  $\overrightarrow{MN}$  و  $\overrightarrow{EF}$  مستقيمتان أي أن  $(EF) \parallel (MN)$

الرمز ➤ في كل السلسلة للإشارة إلى شروط تطبيق مبرهنة طاليس المباشرة أو العكسية.

**تمرين 3 :**  $ABCD$  رباعي محدب و  $M$  نقطة تقاطع قطريه.



لدينا في المثلث ABC :

$E \in (AB)$  و  $M \in (AC)$  ➤

$(EM) \parallel (BC)$  (معطيات) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$(1) \quad \frac{AE}{AB} = \frac{BM}{AC}$$

لدينا في المثلث ADC :

$F \in (AD)$  و  $M \in (AC)$  ➤

$(FM) \parallel (DC)$  (معطيات) ➤

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$(2) \quad \frac{AF}{AD} = \frac{BM}{AC}$$

من (1) و (2) نستنتج أن:  $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$  ، لدينا الآن ، في المثلث  $ABD$  :

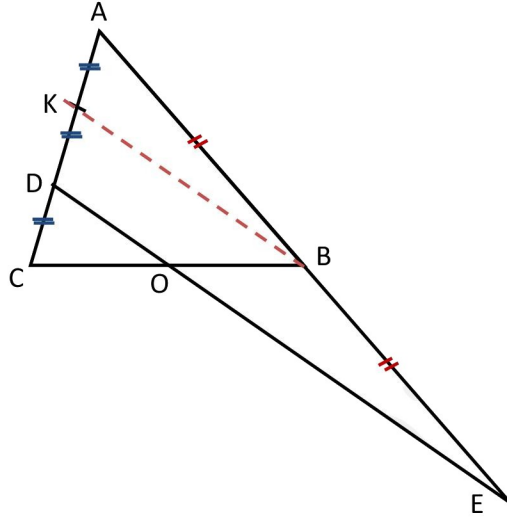
➤  $E \in (AB)$  و  $F \in (AD)$

➤ للنقط  $A$  و  $E$  و  $B$  نفس ترتيب  $A$  و  $F$  و  $D$

➤  $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AD}$  (حسب الاستنتاج السابق)

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن:  $(EF) \parallel (BD)$

#### تمرين 4 :



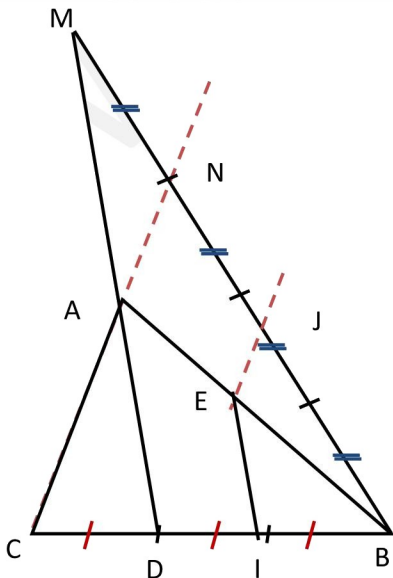
1 لنبين أن  $(KB) \parallel (OD)$  ، في المثلث  $ADE$  لدينا  $B$  منتصف  $[AE]$  و  $K$  منتصف  $[AD]$  إذن  $(KB) \parallel (DE)$  (خاصية المستقيم المار بمنتصفي ضلعي مثلث) وبما أن  $O \in (DE)$  فإن:  $(KB) \parallel (OD)$

2 لنبرهن أن  $O$  منتصف  $[BC]$  ،  
بما أن  $(KB) \parallel (OD)$  فإنه يمكن اعتبار الإسقاط على  $(BC)$  بتواز مع المستقيم  $(KB)$  باعتبار هذا الإسقاط لدينا : مسقط  $K$  هي  $B$  و مسقط  $D$  هي  $O$  و مسقط  $C$  هي  $C$  إذن مسقط القطعة  $[CK]$  هي القطعة  $[CB]$

و بما أن  $[CK]$  منتصفها هو  $D$  و لأن الإسقاط يحافظ على منتصف قطعة فإن  $[CB]$  منتصفها هو  $O$

السؤال الثاني يمكن الإجابة عنه باستعمال خاصية « المستقيم المار بمنتصف ضلع مثلث و الموازي للضلع الثاني سيمر بمنتصف الضلع الثالث » ، لكننا فضلنا طريقة تستغل خصائص الإسقاط

تمرين 5 : مثلث  $ABC$  ،  $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$  و  $\overrightarrow{DM} = 2 \overrightarrow{DA}$  و  $4 \overrightarrow{BN} + 3 \overrightarrow{MB} = \vec{0}$



المساوية  $\overrightarrow{DB} = -\frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$  تعني:  $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$

والمساوية  $4 \overrightarrow{BN} + 3 \overrightarrow{MB} = \vec{0}$  تعني:  $4 \overrightarrow{BN} = -3 \overrightarrow{MB} = 3 \overrightarrow{BM}$

أي:  $\overrightarrow{BN} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BM}$

في هذا السؤال يجب تغيير المتساويات المتجهية لكي نحصل على متساويات أكثر تبسيطا حتى نتمكن من إنشاء الشكل.

$$\vec{MB} = \frac{4}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} \text{ لنبين أن}$$

$$\vec{MB} = \vec{MD} + \vec{DB} = -\vec{DM} + \vec{DB} = -2\vec{DA} + \vec{DB} =$$

$$\vec{MB} = -2(\vec{DB} + \vec{BA}) + \vec{DB} = -2\vec{DB} - 2\vec{BA} + \vec{DB}$$

$$\vec{MB} = -2\vec{BA} - \vec{DB} = 2\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC} = 2\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{AC} \text{ لدينا :}$$

$$\vec{MB} = \left(2 - \frac{2}{3}\right)\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC} = \frac{4}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$$

$$\vec{NB} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} \text{ لنبين أن} \quad 2$$

$$\vec{NB} = -\frac{3}{4}\vec{BM} = \frac{3}{4}\vec{MB} = \frac{3}{4}(\vec{MD} + \vec{DB}) = \frac{3}{4}(2\vec{AD} + \vec{DB}) = \frac{3}{4}(2\vec{AB} + 2\vec{BD} + \vec{DB})$$

$$\vec{NB} = \frac{3}{4}(2\vec{AB} + 2\vec{BD} - \vec{BD}) = \frac{3}{4}(2\vec{AB} + \vec{BD}) = \frac{3}{4}\left(2\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}\right) = \frac{6}{4}\vec{AB} + \frac{6}{12}\vec{BC} \text{ لدينا :}$$

$$\vec{NB} = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC}) = \frac{3}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \frac{3}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$$

يتطلب الإجابة عن هذين السؤالين بحثا ومحاولة تفكيك المتجهات باستعمال علاقة شال، الإشكال يكمن في النقطة التي يجب استعمالها لكي نستطيع استعمال المعطيات و الوصول للنتيجة المطلوبة، ورغم أنه يبدو معقدا لكثرة المتساويات فلأننا حاولنا الشرح أكثر ما يمكن.

لنبين أن: النقط A و C و N مستقيمة

$$\vec{CN} = \vec{CB} + \vec{BN} = \vec{CB} + \frac{3}{4}\vec{BM} = \vec{CB} + \frac{3}{4}\left(\frac{4}{3}\vec{BA} + \frac{2}{3}\vec{CA}\right) = \vec{CB} + \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{CA} = \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{CA} = \frac{3}{2}\vec{CA} \text{ لدينا :} \quad 3$$

بالتالي النقط A و C و N مستقيمة

لدينا في المثلث ADB :

$$E \in (AB) \text{ و } I \in (DB) \quad \triangleright$$

$$(EI) \parallel (AD) \text{ (معطيات)} \quad \triangleright$$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن:

$$(1) \quad \frac{BE}{BA} = \frac{BI}{BD}$$

لدينا في المثلث ABN :

$$E \in (AB) \text{ و } J \in (BN) \quad \triangleright$$

$$(EJ) \parallel (AN) \text{ (معطيات)} \quad \triangleright$$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن:

$$(2) \quad \frac{BE}{BA} = \frac{BJ}{BN}$$

4

من (1) و (2) نستنتج أن:  $\frac{BI}{BD} = \frac{BJ}{BN}$  ، لدينا الآن: في المثلث BDN :

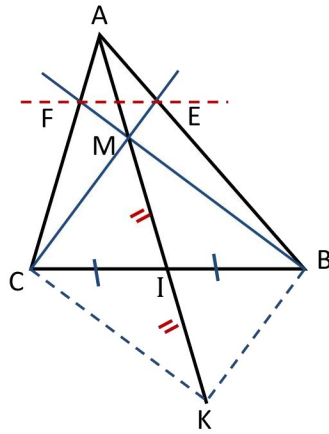
$$J \in (BN) \text{ و } I \in (DB) \quad \triangleright$$

$$\triangleright \text{ للنقط B و J و N نفس ترتيب B و I و D}$$

$$\triangleright \frac{BI}{BD} = \frac{BJ}{BN} \text{ (حسب الاستنتاج السابق)}$$

إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن:  $(IJ) \parallel (DN)$

تمرين نموذجي اخترناه من الكتاب المدرسي يوضح كيف يمكن توظيف مفهوم الإسقاط و المتجهات و مبرهنة طاليس.



1

لدينا  $K$  مماثلة  $M$  بالنسبة لـ  $I$   
 إذن للقطعتين  $[MK]$  و  $[BC]$  نفس المنتصف منه  $CMBK$  متوازي الأضلاع  
 إذن:  $(ME) \parallel (BK)$  و  $(MF) \parallel (CK)$

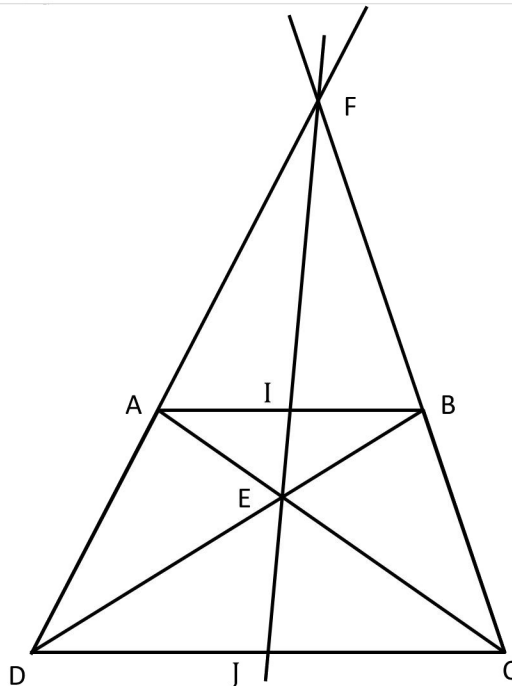
لدينا في المثلث  $ACK$  :  
 $M \in (AK)$  و  $F \in (AC)$  ➤  
 $(MF) \parallel (CK)$  ➤  
 إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن:  
 (2)  $\frac{AF}{AC} = \frac{AM}{AK}$

لدينا في المثلث  $ABK$  :  
 $M \in (AK)$  و  $E \in (AB)$  ➤  
 $(ME) \parallel (BK)$  ➤  
 إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن:  
 (1)  $\frac{AE}{AB} = \frac{AM}{AK}$

2

من (1) و (2) نستنتج أن:  $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$  ، لدينا الآن ، في المثلث  $ABC$  :  
 $F \in (AC)$  و  $E \in (AB)$  ➤  
 للنقط  $A$  و  $E$  و  $B$  نفس ترتيب  $A$  و  $F$  و  $C$  ➤  
 $\frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$  (حسب الاستنتاج السابق) ➤  
 إذن حسب مبرهنة طاليس العكسية نستنتج أن:  $(EF) \parallel (BC)$

تمرين 7 : - مزيدا من التفكير -



لدينا في المثلث  $FDJ$  :

$$I \in (FJ) \text{ و } A \in (DF) \triangleright$$

$$(AI) \parallel (DJ) \triangleright$$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$(1) \quad \frac{FA}{FD} = \frac{FI}{FJ} = \frac{AI}{DJ}$$

لدينا في المثلث  $FDC$  :

$$B \in (FC) \text{ و } A \in (DF) \triangleright$$

$$(AB) \parallel (DC) \triangleright$$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$(3) \quad \frac{FA}{FD} = \frac{FB}{FC} = \frac{AB}{DC}$$

لدينا في المثلث  $AIE$  :

$$C \in (AE) \text{ و } J \in (EI) \triangleright$$

$$(JC) \parallel (AI) \triangleright$$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$(2) \quad \frac{EI}{EJ} = \frac{EA}{EC} = \frac{IA}{JC}$$

لدينا في المثلث  $ABE$  :

$$C \in (AE) \text{ و } D \in (EB) \triangleright$$

$$(AB) \parallel (DC) \triangleright$$

إذن حسب مبرهنة طاليس المباشرة نستنتج أن :

$$(4) \quad \frac{EA}{EC} = \frac{EB}{ED} = \frac{AB}{CD}$$

من (1) و (3) نستنتج أن :  $(*) \frac{AI}{DJ} = \frac{AB}{DC}$  و من (2) و (4) نستنتج أن :  $(**) \frac{IA}{JC} = \frac{AB}{CD}$

إذن من  $(*)$  و  $(**)$  نستنتج أن :  $\frac{AI}{DJ} = \frac{AI}{JC}$  منه :  $DJ = JC$  بالتالي :  $J$  منتصف  $[DC]$

من  $(**)$  نستنتج أن :  $\frac{AI}{AB} = \frac{DJ}{DC}$  و حيث أن  $J$  منتصف  $[DC]$  فإن :  $\frac{DJ}{DC} = \frac{1}{2}$

منه :  $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$  بالتالي  $I$  منتصف  $[AB]$

خلال كل السلسلة قد تلاحظ أن استعمال مبرهنة طاليس يطغى على استعمال خاصية حفاظ الإسقاط على استقامية متجهتين لأن هذه الأخيرة هي مجرد نتيجة لخاصية طاليس، إذ يمكن القول أنها مظهر آخر لمبرهنة طاليس ليس إلا.