الجذع المشترك العلمي و التكنلوجي	الحساب المتجهي في المستوى حلول مقترحة	

تمرين 1 : A و B و C و M نقط من المستوى . نعتبر المتجهة : $\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

$\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-3\overrightarrow{MC}$

لدينا :

$$\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}\right)-3\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}\right)$$
$$\vec{u}=\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{AC}$$
$$\vec{u}=3\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$
$$\vec{u}=\vec{0}+2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$
$$\vec{u}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$$

لنبين أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان .

لدينا :

$$\vec{v}=2\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{BA}-6\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)$$
$$\vec{v}=2\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{AC}=-4\overrightarrow{BA}-6\overrightarrow{AC}$$
$$\vec{v}=4\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AC}=2\left(2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}\right)=2\vec{u}$$

بالتالي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان.

لإثبات استقامية متجهتين نبين أن إحداهما تساوي جداء الأخرى في عدد حقيقي

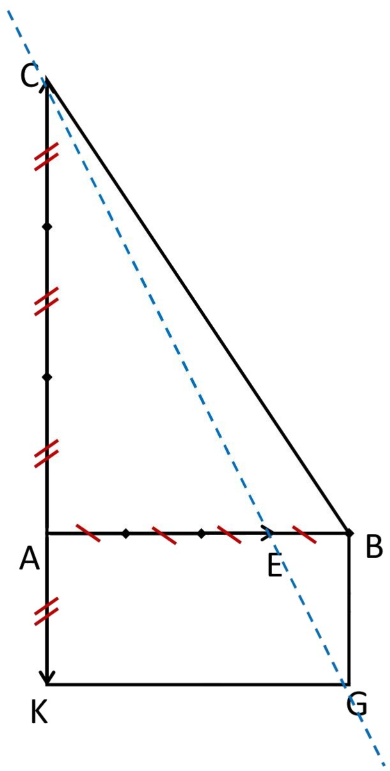
تمرين 2 : ABC مثلث قائم الزاوية في A . $\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

1

$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{GA}+3\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AC}\right)=\vec{0}$$
$$\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\vec{0}$$
$$3\overrightarrow{GA}=-3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$$
$$-3\overrightarrow{GA}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$
$$3\overrightarrow{AG}=3\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AG}=\frac{3}{3}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

أثناء الحساب المتجهي نستعمل بعض قواعد الحساب العددي التي تظل صحيحة ، إذ يمكننا نقل متجهة من طرف متساوية للطرف الآخر شرط تغيير إشارة معاملها، كما يمكننا نشر تعبير متجهي : $a\left(\vec{u}+\vec{v}\right)=a\vec{u}+a\vec{v}$ ، كما يمكن تغيير طرفي المتجهة شرط تغيير معاملها : $a\overrightarrow{MN}=-a\overrightarrow{NM}$

3



2

لدينا $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AC}$ إذن :

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AK}$$
$$\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{KA}=\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{AB}$$

إذن الرباعي $ABGK$ متوازي أضلاع و هو ما يسمح بإنشاء النقطة G

استعنا في السؤال بخاصية تبادلية جمع متجهتين و علاقة شال.

3

لدينا : $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AE}$ و لدينا : $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AK}$ (لأن $\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AC}$) و $\overrightarrow{AE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

إذن : $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{AK}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

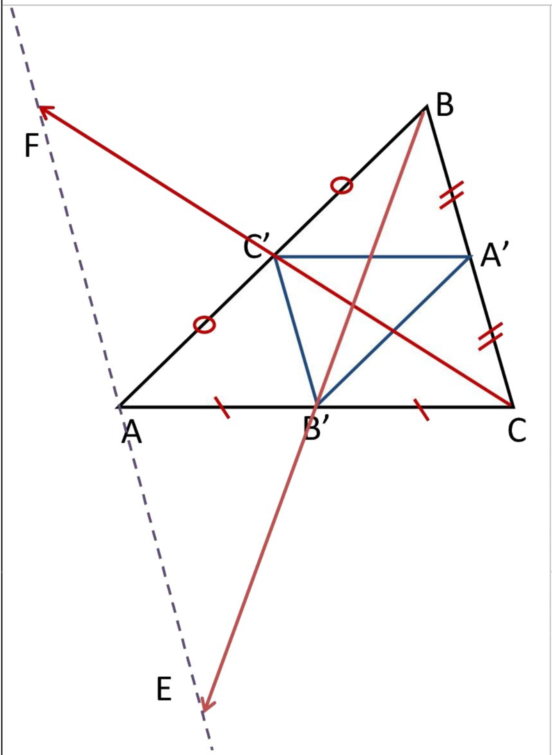
من جهة أخرى لدينا : $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CK}+\overrightarrow{KG}$ و لدينا : $\overrightarrow{CK}=4\overrightarrow{AK}$ (لأن $\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AC}$) و $\overrightarrow{KG}=\overrightarrow{AB}$ (لأن $ABGK$ متوازي أضلاع) ، إذن : $\overrightarrow{CG}=4\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AB}$

نستنتج إذن أن : $\overrightarrow{CE}=3\overrightarrow{AK}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\left(4\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{CG}$ بالتالي النقط E و C و G مستقيمية

أثناء إنشاء النقطة K قمنا بتقسيم القطعة $[AC]$ إلى 3 قطع متقايسة ، لذلك يمكننا و بالاستعانة بالشكل استخراج متساويات متجهية يمكن أن تساعدنا في البرهان كـ $\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{AK}$ (لكن إذا أردت استعمال متساوية مستخرجة من الشكل يجب أن تحدد المعطيات الملائمة: $\overrightarrow{AK}=\frac{-1}{3}\overrightarrow{AC}$).

من ناحية أخرى إثبات بعض المتساويات المتجهي يتطلب بحثا ليس من السهل إيجاده بسرعة، هذا يعني أن إتقان هذا الأمر يتطلب مهارات تكتسب بإنجاز التمارين مع البحث كل مرة عن الطريقة الأكثر وضوحا لإيجاد الحل.

تمرين 3 : ABC مثلث ، A' و B' و C' هي على التوالي منتصفات $[BC]$ و $[AC]$ و $[AB]$



1

لدينا A' منتصف $[BC]$ إذن : $\overrightarrow{AA'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

و لدينا B' منتصف $[AC]$ إذن : $\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$

و لدينا C' منتصف $[AB]$ إذن : $\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$$

منه : $$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\vec{0}+\vec{0}+\vec{0}\right)=\vec{0}$$

استعنا بالخاصية الهامة : إذا كانت I منتصف قطعة $[AB]$ فإنه لكل نقطة M من المستوى $\overrightarrow{MI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)$

2

$$\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

3

أ

لدينا : $\overrightarrow{BB'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$ منه $2\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

و لدينا : $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BB'}$ ، إذن $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$

إذن : $ABCE$ متوازي أضلاع

لدينا : $\overrightarrow{CC'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}\right)$ منه $2\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

و لدينا : $\overrightarrow{CF}=2\overrightarrow{CC'}$ ، إذن $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$

إذن : $ACBF$ متوازي أضلاع

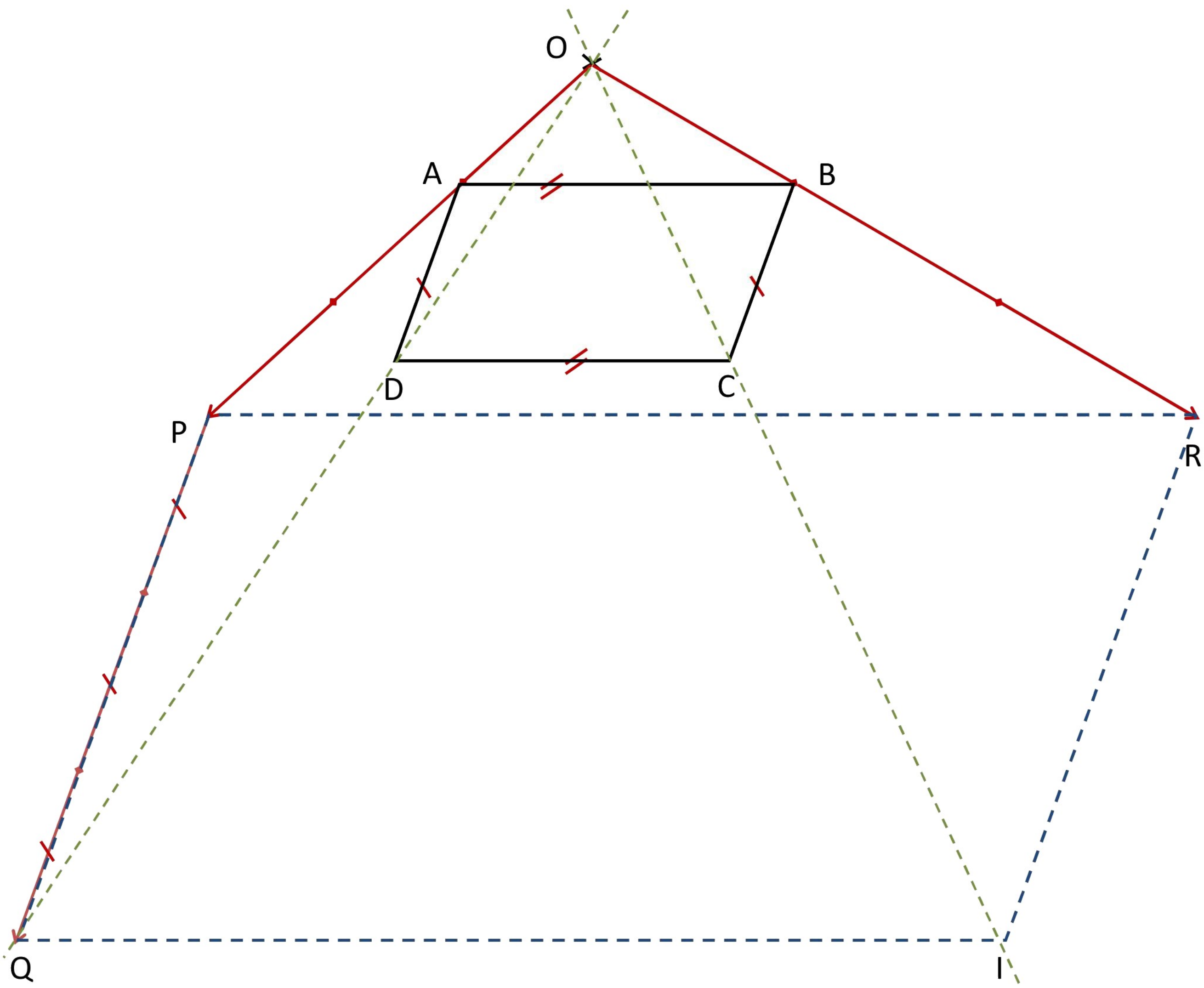
ب

لدينا $ABCE$ متوازي أضلاع إذن : $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BC}$ و لدينا $ACBF$ متوازي أضلاع إذن : $\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{BC}$

منه : $\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AE}$ ، بالتالي النقط E و A و F مستقيمية.

تمرين 4 : ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع و O نقطة من المستوى.

1. $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}$ و $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{OR}=3\overrightarrow{OB}$ و $RPQI$ متوازي أضلاع



2. لنبين أن النقط O و D و Q مستقيمية.

لدينا : $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{AD}$ ، إذن : $\boxed{\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=3\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{AD}=3\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}\right)=3\overrightarrow{OD}}$

بالتالي النقط O و D و Q مستقيمية.

3. بين أن $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتان.

لدينا : ، $\overrightarrow{OP}=3\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OR}=3\overrightarrow{OB}$ ، إذن : $\boxed{\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PO}+\overrightarrow{OR}=3\overrightarrow{AO}+3\overrightarrow{OB}=3\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}\right)=3\overrightarrow{AB}}$

بالتالي $\overrightarrow{PR}$ و $\overrightarrow{AB}$ مستقيميتان.

4. أتبث أن : O و C و I مستقيمية.

لدينا $RPQI$ متوازي أضلاع منه : $\overrightarrow{QI}=\overrightarrow{PR}$ منه : $\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QI}=3\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{PR}=3\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{AB}$

ولدينا $ABCD$ متوازي أضلاع منه : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ منه : $\boxed{\overrightarrow{OI}=3\overrightarrow{OD}+3\overrightarrow{DC}=3\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}\right)=3\overrightarrow{OC}}$

بالتالي : O و C و I مستقيمية.

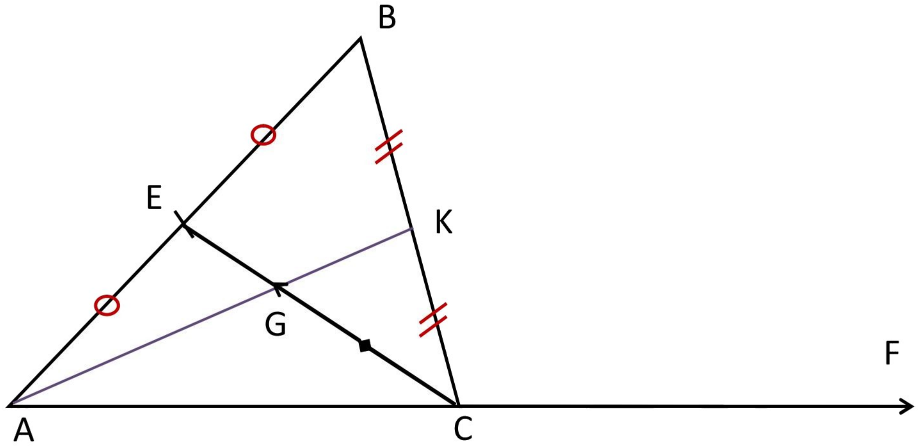
تمرين 5 : لدينا $(5x-1)\vec{u}+(y^2+1)\vec{v}=(x+3)\vec{u}+2y\,\vec{v}$ منه : $(y^2+1)\vec{v}-2y\,\vec{v}=(x+3)\vec{u}-(5x-1)\vec{u}$

منه : $(y^2+1-2y)\vec{v}=(x+3-5x+1)\vec{u}$ منه : $(y-1)^2\,\vec{v}=(-4x+4)\vec{u}$

وبما أن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان غير مستقيميتان فإن : $(y-1)^2=0$ و $-4x+4=0$ (وإلا لاستطعنا كتابة إحداهما على شكل جداء عدد حقيقي في الأخرى)، منه : $y=1$ و $x=1$

تمرين 6 : ليكن ABC ، نعتبر النقط E و F و G بحيث : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ ، $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{CF}$ ، $2\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$

1	$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$	لدينا : $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{CF}$ منه : $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{AF}$ منه : $-2\overrightarrow{CA}=2\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AF}$ منه : $\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{AC}$	لدينا $2\overrightarrow{GE}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ منه: $2\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}$ أي : $3\overrightarrow{GC}+2\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{0}$ أي : $3\overrightarrow{GC}=-2\overrightarrow{CE}$ أي $\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$



رسم الشكل يتطلب إعادة كتابة المعطيات المتجهية بحيث يمكن رسم النقط المجهولة بمتساويات واضحة أي على شكل : $\overrightarrow{PM}=k\overrightarrow{PQ}$ حيث P و Q نقطتان معلومتان و k عدد حقيقي و M هي النقطة المجهولة.

2

لنبين أن $\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{EC}$

لدينا : $\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=2\overrightarrow{EA}+2\overrightarrow{AC}=2\left(\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AC}\right)=2\overrightarrow{EC}$ ($\overrightarrow{BA}=2\overrightarrow{EA}$ لأن : E منتصف $[AB]$)

3

__طريقة 1__

بما أن : E منتصف $[AB]$ و النقطة G تبعد الرأس C بثلثي المسافة EC) إذن النقطة G تمثل مركز ثقل المثلث ABC ، إذن المستقيم (AG) يمثل أحد متوسطاته، إذن فهو يمر من منتصف الضلع $[BC]$

بالتالي : K منتصف $[BC]$

__طريقة 2__

لتكن I منتصف $[BC]$، سنبين أن $I=K$

لدينا : $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{CE}$ ، و بما أن : E منتصف $[AB]$ فإن : $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$

$$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)\right)=\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\right)$$

منه : $$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)$$

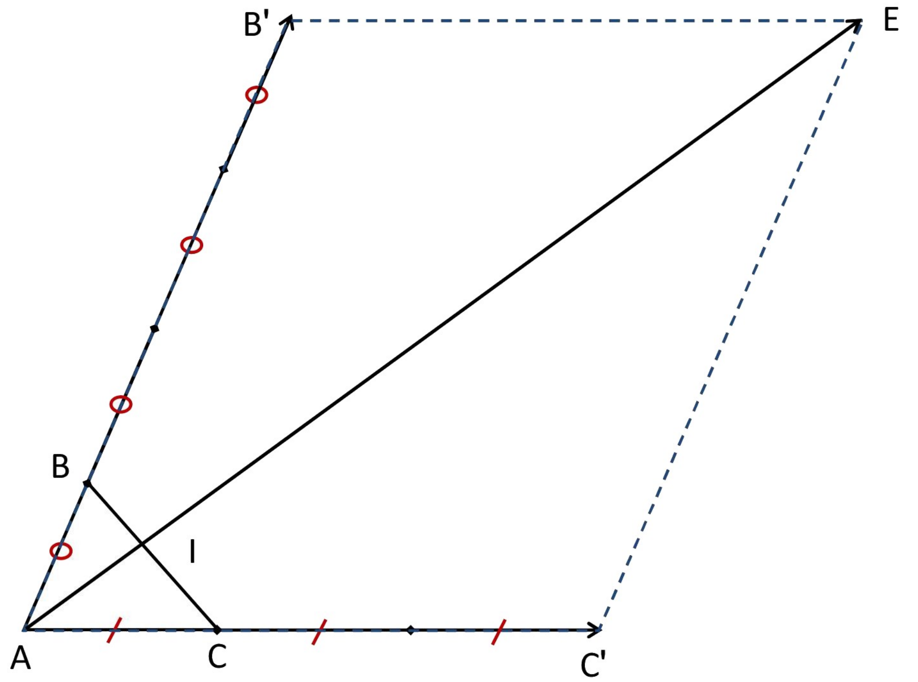
$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\right)$$

و بما أن I منتصف $[BC]$ فإن : $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$ منه : $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ ، إذن $I\in(AG)$

هذا يعني أن النقطة I هي نقطة تقاطع (BC) و (AG) منه : $I=K$ ، بالتالي : K منتصف $[BC]$

تمرين 7 : ليكن ABC مثلثا و E نقطة بحيث : $\overrightarrow{AE}=3\,\overrightarrow{AB}+4\,\overrightarrow{AC}$

1



2

أ

لدينا : $\overrightarrow{AE}=a\,\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{CI}=b\,\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{AE}=3\,\overrightarrow{AB}+4\,\overrightarrow{AC}$

إذن : $a\,\overrightarrow{AI}=3\,\overrightarrow{AB}+4\,\overrightarrow{AC}$ منه : $a\,\overrightarrow{AI}=3\,\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{AI}+4\,\overrightarrow{IC}$ منه : $a\,\overrightarrow{AI}=7\,\overrightarrow{AI}+3\overrightarrow{IB}-4\,b\,\overrightarrow{IB}$

بالتالي : $\boxed{(a-7)\overrightarrow{AI}=(3-4\,b)\overrightarrow{IB}}$

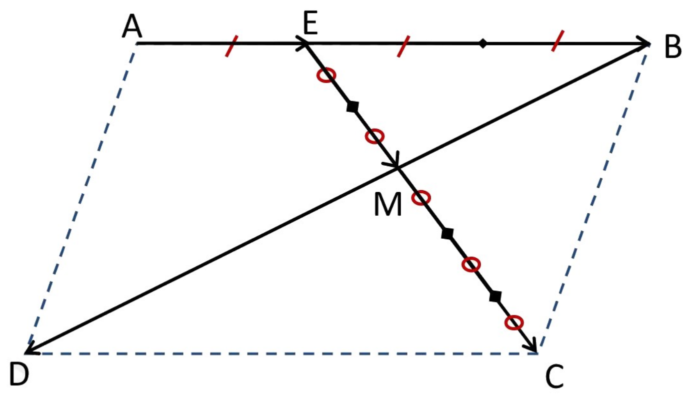
ب

بما أن المتجهتين $\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{IB}$ غير مستقيميتين فإن : $a-7=0$ و $3-4b=0$ أي : $a=7$ و $b=\frac{3}{4}$

بالتالي : $\overrightarrow{AE}=7\,\overrightarrow{AI}$ أي : $\boxed{\overrightarrow{AI}=\frac{1}{7}\overrightarrow{AE}}$

تمرين 8 : ـ مزيدا من التفكير ـ

ABCD متوازي أضلاع، E و M نقطتان حيث : $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\,\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EM}=\frac{2}{5}\,\overrightarrow{EC}$



لدينا :

$$\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{BE}+\frac{2}{5}\overrightarrow{EC}=\overrightarrow{BE}+\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{BC}\right)$$

$$=\left(1-\frac{2}{5}\right)\overrightarrow{BE}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}=\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{BM}=\frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)=\frac{2}{5}\overrightarrow{BD}$$

بالتالي B و M و D مستقيمية.