ملخصي وقواعدي في الرياضيات لمستوى جذع مشترك علوم

من انجاز : الأستاذ نجيب عثماني أستاذ مادة الرياضيات في الثانوي تأهيلي

ملخص درس الحدوديات

I. تقديم حدودية و تساوي حدوديتين:

1) أمثلة و تعاريف: مثال 1: التعبير $P(x)=\frac{1}{2}x^3-\sqrt{2}x^2+x-\frac{1}{3}$

يسمى حدودية و $\frac{1}{2}x^3$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 3.

$-\sqrt{2}x^2$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 2.

x يسمى حد الحدودية من الدرجة 1. $-\frac{1}{3}$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 0

الحد الأكبر درجة هو $\frac{1}{2}x^3$, العدد 3 يسمى درجة الحدودية و نكتب $d^0P=3$

مثال 2: كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل: $ax+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$.

مثال 3: التعبير $x^2+2\sqrt{x}+5$ ليس بحدودية لأنها تحتوي على $\sqrt{x}$.

مثال 4: الحدودية: $P(x)=3x^4+x^3-7x+\sqrt{3}$ درجتها 4.

3 هو معامل الحد من الدرجة 4 . 1 هو معامل الحد من الدرجة 3 , 0 هو معامل الحد من الدرجة 2.

7- هو معامل الحد من الدرجة 1 , $\sqrt{3}$ هو معامل الحد من الدرجة 0.

نرمز عادة لحدودية بأحد الرموز: $P(x)$ أو $Q(x)$ أو $R(x)$ أو $S(x)$

نعتبر الحدودية: $P(x)=4x^2-x^3+x^4+3+x$.

يمكن كتابة الحدودية $P(x)$: على شكل:

$$P(x)=x^4-x^3+4x^2+x+3$$

نقول إننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التزايدية.

ملحوظة: الحدودية المنعدمة هي حدودية جميع معاملاتها تساوي صفرا.

أي $P(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$.والحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

2) تساوي حدوديتين: خاصية: تكون حدوديتان متساويتين اذا و فقط اذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

II. جمع و ضرب حدوديتين:

خاصية 1: مجموع حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x)+Q(x)$.

خاصية 2: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا:

$d^0(P+Q)\leq d^0P+d^0Q$ في حالة $P(x)+Q(x)$ حدودية غير منعدمة.

خاصية 3: جداء حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x)\times Q(x)$. و لدينا: $d^0(P(x)\times Q(x))=d^0P(x)+d^0Q(x)$

III. القسمة الاقليدية لحدودية على $x-\alpha$:

1) جذر حدودية: تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا.

نقول أن α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان: $P(\alpha)=0$.

α يسمى أيضا صفرا للحدودية $P(x)$.

مثال: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^2-x-1$

بين أن 1 جذر للحدودية $P(x)$ وتأكد أن : $P(x)=(x-1)(2x+1)$

الجواب : $P(1)=2\times1^2-1-1=0$ اذن 1 جذر للحدودية $P(x)$

$(x-1)(2x+1)=2x\times x+x-2x-1=2x^2-x-1=P(x)$

اذن $P(x)=(x-1)(2x+1)$ ونقول $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$

2) قابلية القسمة على $x-\alpha$:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$

بحيث: $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$

خاصية: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا و فقط إذا كان α جذرا للحدودية $P(x)$.

مثال: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

1) بين أن 3- جذر للحدودية $P(x)$

2) حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x)=(x+3)Q(x)$

الجواب :1) 3- جذر للحدودية: لأن $P(-3)=0$

2) إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x+3$, و منه توجد حدودية $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=(x+3)Q(x)$ لدينا $P(x)$ درجتها 3.و $R(x)=x+3$ درجتها 1

إذن $Q(x)$ درجتها 2 و بالتالي $Q(x)$ تكتب على شكل:

$$Q(x)=ax^2+bx+c \quad (a\neq0)$$

تحديد $Q(x)$: الطريقة 1: لدينا: $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$$P(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$$

يعني أن: $x^3+3x^2-2x-6=(x+3)(ax^2+bx+c)$

$$=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$$

$$=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$$

حسب خاصية تساوي حدوديتين لدينا: $a=1$ و $b+3a=3$ و $c+3b=-2$ و $3c=-6$

يعني أن: $a=1$ و $b=0$ و $c=-2$ اذن: $Q(x)=x^2-2$.

الطريقة 2: القسمة الاقليدية: $P(x)=x^3+3x^2-2x-6=(x+3)(x^2-2)$

و منه $Q(x)=x^2-2$

مراحل انجاز القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-2x-6 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2 & x^2-2 \\ \cline{1-1} -2x-6 & \\ 2x+6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

ملاحظة :القسمة الاقليدية تمكننا من تعميل حدودية

$P(x)=x^3+3x^2-2x-6=(x+3)(x^2-2)$