الجبر

مذكرة رقم 7 : الحدوديات مع تمارين وأمثلة محلولة

الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس :

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
- تقديم حدودية، تساوي حدوديتين؛ - جمع وضرب حدوديتين؛ - جذر حدودية، القسمة على $x-a$ ؛ - تعميل حدودية.	- التمكن من تقنية القسمة الإقليدية على $x-a$ وإدراك قابلية القسمة على $x-a$.	- ينبغي تجنب إعطاء أي بناء نظري لمفهوم الحدودية ويمكن تقديمها، مع الإشارة إلى العناصر المميزة لها (الحد، الدرجة، المعامل)، من خلال أمثلة بسيطة؛ - إذا كانت تقنية القسمة لحدودية على $x-a$ تلعب دورا في تعميل حدودية أحد جذورها هو a فإنه ينبغي الاهتمام بباقي التقنيات التي تؤدي إلى هذا التعميل.

I.تقديم حدودية و تساوي حدوديتين:

1) تقديم حدودية: أمثلة و تعاريف: مثال 1:

التعبير $P(x)=\frac{1}{2}x^3-\sqrt{2}x^2+x-\frac{1}{3}$ يسمى حدودية

$\frac{1}{2}x^3$ يسمى حد الحدودية من الدرجة3.

$-\sqrt{2}x^2$ يسمى حد الحدودية من الدرجة2.

x يسمى حد الحدودية من الدرجة 1. $-\frac{1}{3}$ يسمى حد الحدودية من الدرجة 0

الحد الأكبر درجة هو $\frac{1}{2}x^3$, العدد 3 يسمى درجة الحدودية. و نكتب

$d^0P=3$

مثال 2: كل حدودية من الدرجة الأولى تسمى حدانية و تكتب على شكل: $ax+b$ حيث $a\in\mathbb{R}^*$.

مثال 3: التعبير $x^2+2\sqrt{x}+5$ ليس بحدودية لأنها تحتوي على $\sqrt{x}$.

مثال 4: الحدودية: $P(x)=3x^4+x^3-7x+\sqrt{3}$ درجتها4.

3 هو معامل الحد من الدرجة 4 . 1 هو معامل الحد من الدرجة 3 , 0 هو معامل الحد من الدرجة 2.

-7 هو معامل الحد من الدرجة 1 , $\sqrt{3}$ هو معامل الحد من الدرجة 0.

نرمز عادة لحدودية بأحد الرموز: $P(x)$ أو $Q(x)$ أو $R(x)$ أو $S(x)$ ....

نعتبر الحدودية: $P(x)=4x^2-x^3+x^4+3+x$.

يمكن كتابة الحدودية $P(x)$ على شكل:

$P(x)=x^4-x^3+4x^2+x+3$

نقول إننا رتبنا $P(x)$ تبعا للقوى التزايدية.

تمرين1 : حدد من بين التعابير التالية الحدوديات و درجتها ان أمكن: حيث $a\in\mathbb{R}$

$P(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{\sqrt{2}}{2}x^2-\sqrt{3}$ و $Q(x)=2x^2-x-\sqrt{x}$

$R(x)=5|x^2|+4|x|-5$ و $M(x)=\frac{5}{3}x^2+x+2-7x^4$

$N(x)=x^2+\frac{1}{x}+3$ و $O(x)=4$ و $E(x)=(a-1)x^4+x^2+x+1$

الجواب : $P(x)$ حدودية.و $d^\circ P=3$ و $Q(x)$ ليست بحدودية.

و $R(x)$ ليست بحدودية.

$M(x)$ حدودية. و $d^\circ P=4$

$O(x)$ حدودية. و $d^\circ P=0$

$E(x)$ حدودية.

الحالة1 : $a=1$ $d^\circ P=2$ **الحالة2 :** $a-1\neq 0$ يعني $a\neq 1$

$d^\circ P=4$

2) تعريف: الحدودية المنعدمة هي الحدودية التي جميع معاملاتها تساوي صفرا.

أي $P(x)=0$ لكل x من $\mathbb{R}$.

ملحوظة: الحدودية المنعدمة ليست لها درجة.

3) تساوي حدوديتين:

نشاط : نعتبر الحدوديتين التاليتين :

$P(x)=2x^3-2x^2+x-3$ و $Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)$

1. حدد درجة الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$
2. ماذا تلاحظ ؟

الجواب على النشاط: (1 $d^\circ P=3$

لايمكن تحديد درجة الحدودية $Q(x)$ الا بعد النشر والتبسيط

$Q(x)=2x^2(x-2)+(x-1)(2x+3)=2x^3-4x^2+2x^2+3x-2x-3$

$Q(x)=2x^3-2x^2+x-3$ ومنه $d^\circ Q=3$

2) نلاحظ أيضا أن معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية

نقول ان : $Q(x)=P(x)$

خاصية: تكون حدوديتان متساويتين اذا و فقط اذا كانت لهما نفس الدرجة و كانت معاملات الحدود من نفس الدرجة متساوية.

تمرين2 : نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=(a-1)x^3+2ax^2+5x+6$

و $Q(x)=2x^3+4x^2+(3+a)x+3a$.

حيث a عدد حقيقي يخالف 1. لنحدد قيمة العدد الحقيقي a بحيث تكون $P(x)$ و $Q(x)$ متساويتين.

الجواب :

$a\neq 1$ اذن : $a-1\neq 0$ ومنه : $d^\circ P=3$ ولدينا أيضا $d^\circ Q=3$

إذن: $d^\circ P=d^\circ Q$

$Q(x)=P(x)$ يعني أن : $\begin{cases} a-1=1 \\ 2a=4 \\ 3+a=5 \\ 3a=6 \end{cases}$ يعني $a=2$

تمرين3 : أدرس تساوي الحدوديتين في الحالات التالية:

1. $P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x$ و $Q(x)=x^2(3x-2)+x$
2. $P(x)=(x-1)^3$ و $Q(x)=x^3-3x^2-3x+1$

الجواب : 1)

$P(x)=x^3+2x^2(x-1)+x=x^3+2x^3-2x^2+x=3x^3-2x^2+x$

$Q(x)=x^2(3x-2)+x=3x^3-2x^2+x=P(x)$

2) $P(x)=(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

إذن: $P(x)\neq Q(x)$ لأن معاملات الحد من الدرجة 1 غير متساوية $(3\neq-3)$

II. جمع و ضرب حدوديتين:

نشاط1 : أحسب مجموع الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث:

$P(x)=x^2+x+1$ و $Q(x)=x^3-x^2+2$

ثم قارن : $d^0(P+Q).......d^0P+d^0Q$

الجواب : لدينا: $P(x)+Q(x)=(x^2+x+1)+(x^3-x^2+2)=x^3+x+3$

اذن : $d^0(P+Q)\leq d^0P+d^0Q$

خاصية 1: مجموع حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x)+Q(x)$.

خاصية 2: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا:

$d^0(P+Q)\leq d^0P+d^0Q$ في حالة $P(x)+Q(x)$ حدودية غير منعدمة.

تمرين4: نعتبر الحدوديتين التاليتين :

$P(x)=5x^3-2x^2+3x+1$ و $Q(x)=-2x^3+5x^2-2x-1$

حدد : $P(x)+Q(x)$ و $P(x)-Q(x)$

الجواب: $P(x)+Q(x)=\ 5x^3-2x^2+3x+1-2x^3+5x^2-2x-1$

$P(x)+Q(x)=\ 3x^3+3x^2+x$

$P(x)-Q(x)=\ (5x^3-2x^2+3x+1)-(-2x^3+5x^2-2x-1)$

$P(x)-Q(x)=\ 5x^3-2x^2+3x+1+2x^3-5x^2+2x+1$

$P(x)-Q(x)=\ 7x^3-7x^2+5x+2$

نشاط2 : أحسب جذاء الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ حيث:

$P(x)=x^2+x+1$ و $Q(x)=x^3-x^2+2$

ثم قارن : $d^0(P\times Q).......d^0P+d^0Q$

الجواب: لدينا: $P(x)\times Q(x)=(x^2+x+1)\times(x^3-x^2+2)$

$=x^5-x^4+2x^2+x^4-x^3+2x+x^3-x^2+2$

$=x^5+x^2+2x+2$

اذن : $d^0(P(x)\times Q(x))=d^0P(x)+d^0Q(x)$

خاصية 3: جذاء حدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ هو حدودية نرمز لها بالرمز $P(x)\times Q(x)$.

خاصية 4: لتكن $P(x)$ و $Q(x)$ حدوديتين غير منعدمتين. لدينا:

$d^0(P(x)\times Q(x))=d^0P(x)+d^0Q(x)$

III. القسمة الاقليدية لحدودية على $x-\alpha$:

نشاط: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

أحسب: $P(1)$ و $P(2)$ و $P(3)$ و $P(-2)$

الجواب: $P(1)=1^3-2\times1^2-5\times1+6=1-2-5+6=0$

$P(2)=2^3-2\times2^2-5\times2+6=8-8-10+6=-4\neq0$

$P(3)=3^3-2\times3^2-5\times3+6=27-18-15+6=0$

$P(2)=(-2)^3-2\times(-2)^2-5\times(-2)+6=-8-8+10+6=0$

نقول 1 جذر للحدودية $P(x)$ (نفس الجواب بالنسبة ل 3 و -2)

1) جذر حدودية:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية و α عددا حقيقيا.

نقول أن α جذر للحدودية $P(x)$ إذا كان: $P(\alpha)=0$.

α يسمى أيضا صفرا للحدودية $P(x)$.

نشاط: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^2-x-1$

1. بين أن 1 جذر للحدودية $P(x)$

2. تأكد أن : $P(x)=(x-1)(2x+1)$

الجواب: (1 $P(1)=2\times1^2-1-1=0$ اذن 1 جذر للحدودية $P(x)$

(2 $(x-1)(2x+1)=2x\times x+x-2x-1=2x^2-x-1=P(x)$

اذن $P(x)=(x-1)(2x+1)$

نقول $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$

2) قابلية القسمة على $x-\alpha$:

تعريف: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا وجدت حدودية $Q(x)$ درجتها $n-1$ بحيث: $P(x)=(x-\alpha)Q(x)$

خاصية: لتكن $P(x)$ حدودية درجتها n حيث $n\geq1$ و α عددا حقيقيا.

$P(x)$ تقبل القسمة على $x-\alpha$ إذا و فقط إذا كان α جذرا للحدودية $P(x)$.

مثال: نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

1. بين أن -3 جذر للحدودية $P(x)$

2. حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x)=(x+3)Q(x)$

الجواب: (1 -3 جذر للحدودية: لأن $P(-3)=0$

(2 إذن $P(x)$ تقبل القسمة على $x+3$, و منه توجد حدودية $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=(x+3)Q(x)$ لدينا $P(x)$ درجتها 3.و $R(x)=x+3$ درجتها 1

إذن $Q(x)$ درجتها 2 و بالتالي $Q(x)$ تكتب على شكل:

$Q(x)=ax^2+bx+c\quad(a\neq0)$

تحديد $Q(x)$:

الطريقة 1: لدينا: $P(x)=x^3+3x^2-2x-6$

$P(x)=(x+3)(ax^2+bx+c)$

يعني أن: $x^3+3x^2-2x-6=(x+3)(ax^2+bx+c)$

$=ax^3+(b+3a)x^2+(c+3b)x+3c$

$=ax^3+bx^2+cx+3ax^2+3bx+3c$

حسب خاصية تساوي حدوديتين لدينا: $a=1$ و $b+3a=3$ و $c+3b=-2$ و $3c=-6$

يعني أن: $a=1$ و $b=0$ و $c=-2$ اذن: $Q(x)=x^2-2$.

الطريقة 2: $=(x+3)(x^2-2)$

$P(x)=x^3+3x^2-2x-6=x^2(x+3)-2(x+3)$

و منه $Q(x)=x^2-2$

الطريقة 3: انجاز القسمة الاقليدية

مراحل انجاز القسمة الاقليدية:

$$\begin{array}{r|l} x^3+3x^2-2x-6 & x+3 \\ \cline{2-2} -x^3-3x^2 & x^2-2 \\ \cline{1-1} -2x-6 & \\ 2x+6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

تمرين5 : نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^3-5x^2-4x+3$

1. بين أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$
2. حدد حدودية $Q(x)$ بحيث: $P(x)=(x-3)\times Q(x)$

الجواب :1) 3 جذر للحدودية: لأن $P(3)=0$ ومنه $P(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

2) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-3$ فنجد :

$P(x)=(x-3)\times(2x^2+x-1)$

تمرين6 : نعتبر الحدودية $P(x)$ بحيث: $P(x)=2x^2+x-3$

1. بين أن $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$
2. عمل الحدودية $P(x)$

الجواب :

1) 1 جذر للحدودية: لأن $P(1)=0$ ومنه $P(x)$ تقبل القسمة على $x-1$

2) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-1$ فنجد :

$P(x)=(x-1)\times(2x+3)$ ومنه نجد تعميلا للحدودية $P(x)$

تمرين7: نعتبر الحدوديتين $P(x)$ و $Q(x)$ بحيث:

$P(x)=x^3-2x^2-5x+6$

و $Q(x)=x^2-4x+3$.

1. أنجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x+2$.
2. وبين أن $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$.
3. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

الجواب :1)

$$\begin{array}{r|l} x^3-2x^2-5x+6 & x+2 \\ \cline{2-2} -x^3-2x^2 & x^2-4x+3 \\ \cline{1-1} -4x^2-5x+6 & \\ 4x^2+8x & \\ \cline{1-1} 3x+6 & \\ -3x-6 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

2) 3 جذر للحدودية $Q(x)$: لأن $Q(3)=0$ ومنه $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

3) وجدنا حسب السؤال1 $P(x)=(x+2)\times(x^2-4x+3)$

وجدنا حسب السؤال2 $Q(x)$ تقبل القسمة على $x-3$

ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $Q(x)$ على $x-3$

فنجد : $Q(x)=(x-3)\times(x-1)$

ومنه: $P(x)=(x+2)\times(x-3)\times(x-1)$

تمرين2: نعتبر الحدودية $P(x)$ المعرفة بما يلي:

$$P(x)=2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$$

1. تحقق من أن 0 ليس جذرا للحدودية $P(x)$.
2. بين أنه إذا كانت α جذرا للحدودية $P(x)$ فان $\frac{1}{\alpha}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$.
3. بين أن العدد 2 جذر للحدودية $P(x)$.
4. بانجاز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-2$, حدد الحدودية $Q(x)$ حيث: $P(x)=(x-2)Q(x)$
5. استنتج أن: $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$
6. حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث يكون: $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c)$
7. استنتج تعميلا للحدودية $P(x)$ إلى جذاء حدوديات من الدرجة الأولى.

الجواب :1) $P(0)=2\neq 0$ ومنه 0 ليس جذرا للحدودية $P(x)$.

2) α جذر للحدودية $P(x)$ يعني $P(\alpha)=0$ يعني :

$$2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$$

نحسب : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=?$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3+14\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=2\left(\frac{1}{\alpha^4}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha^3}\right)+14\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)-9\left(\frac{1}{\alpha}\right)+2$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\left(\frac{2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{14\alpha^2}{\alpha^4}\right)+\left(\frac{-9\alpha^3}{\alpha^4}\right)+2\frac{\alpha^4}{\alpha^4}$$

$$P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{2-9\alpha+14\alpha^2-9\alpha^3+2\alpha^4}{\alpha^4}$$

وبما أنه لدينا : $2\alpha^4-9\alpha^3+14\alpha^2-9\alpha+2=0$

فان : $P\left(\frac{1}{\alpha}\right)=\frac{0}{\alpha^4}=0$

ومنه $\frac{1}{\alpha}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$.

3) $P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2$

$P(2)=2\times2^4-9\times2^3+14\times2^2-9\times2+2=32-72+56-18+2=0$

ومنه العدد 2 جذر للحدودية $P(x)$.

4) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $P(x)$ على $x-2$

فنجد : $P(x)=(x-2)\times(2x^3-5x^2+4x-1)$

5) وجدنا حسب سؤال سابق أن 2 جذر للحدودية $P(x)$.اذن حسب السؤال السؤال

2) فان $\frac{1}{2}$ هو أيضا جذر للحدودية $P(x)$. يعني : $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$

يعني : $P\left(\frac{1}{2}\right)=0$ وحيث أنه لدينا : $P(x)=(x-2)Q(x)$

فان : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\times Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ أي $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$ لأن : $\left(\frac{1}{2}-2\right)\neq 0$

6) ننجز القسمة الاقليدية للحدودية $Q(x)$ على $x-\frac{1}{2}$ فنجد:

$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$ أي: $a=2$ و $b=-4$ و $c=2$

7) لدينا $P(x)=(x-2)Q(x)$ و $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$

اذن: $P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$

يجب أيضا تعميل : $2x^2-4x+2$

بملاحظة أن 1 جذر للحدودية $2x^2-4x+2$

وبقسمة $2x^2-4x+2$ على $(x-1)$ نجد

أن: $2x^2-4x+2=(x-1)(2x-2)$ وبالتالي:

$$P(x)=(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(2x-2)=2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$$