ثا. محمد بن الحسن الوزاني- الخميسات　　الفرض 1　　الموسم الدراسي 2014/2013

ذ رشيد محصر　　الدورة 1　　القسم: ج م ع 6

التمرين الأول: (3 نقط)

1) حدد جميع قواسم العدد 26　　1 ن

2) حدد جميع الأعداد الصحيحة الطبيعية x و y التي تحقق $(x+2)(y+1)=26$　　2 ن

حلول:

1) مجموعة قواسم العدد 26 هي : $D_{26}=\{1;2;13;26\}$

2) x و y عددان صحيحان طبيعيان إذن $x+2$ و $y+1$ عددان صحيحان طبيعيان حداؤهما 26

ومنه فإن المعادلة تكافئ: $\begin{cases}x+2=1\\y+1=26\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+2=26\\y+1=1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+2=2\\y+1=13\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+2=13\\y+1=2\end{cases}$

أي: $\begin{cases}x=1-2\\y=26-1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=26-2\\y=1-1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=2-2\\y=13-1\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=13-2\\y=2-1\end{cases}$

يعني: $\begin{cases}x=-1\\y=25\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=24\\y=0\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=0\\y=12\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=11\\y=1\end{cases}$

وبالتالي: $S=\{(24;0);(0:12);(11:1)\}$　$(-1\notin\mathbb{N})$

التمرين الثاني: (2 نقط)

تنطلق من ميناء الدار البيضاء باخرة A بعد كل 12 يوما وباخرة B بعد كل 18 يوما. إذا علمت أنهما انطلقتا للمرة الأولى في نفس اليوم، فبعد كم يوما ستنطلقان في نفس اليوم للمرة الثانية؟

حلول:

الأيام التي ستنطلق فيها الباخرة A للمرات المقبلة هي: 12 – 24 – **36** – 48 – 60 – 72 - . . . وهي مضاعفات العدد 12.

كذلك الباخرة B : 18 – **36** – 54 – 72 – 90 - ... وهي مضاعفات العدد 18

ومنه نستنتج أن الباخرتين ستنطلقان في نفس اليوم للمرة الثانية بعد 36 يوما من خلال الكشف السابق.

كما يمكن الحصول على 36 بحساب المضاعف المشترك الأصغر للعددين 12 و 18 أو: ppcm(12;18)

التمرين الثالث: (1.5 نقط)

بين أنه إذا كانت 7 تقسم $n-1$ فإن 7 تقسم أيضا العدد n^2-1 لكل n من $\mathbb{N}$

حلول:

لدينا 7 تقسم $n-1$ إذن يوجد عدد صحيح طبيعي k بحيث: $n-1=7k$

وبما أن:

$$n^2-1=(n-1)(n+1)$$
$$=7k(n+1)$$

فإن 7 يقسم أيضا: n^2-1

التمرين الرابع: (3.5 نقط)

1) بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: n^2-2n+2 هو عدد صحيح طبيعي　　1 ن

2) تحقق من أن: $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ لكل عددين حقيقيين a و b　　0.5 ن

3) اكتب على شكل فرق مربعين كاملين: n^4+4 لكل n من $\mathbb{N}$　　1 ن

4) استنتج من ذلك أن n^4+4 غير أولي، لكل n من $\mathbb{N}$ مخالف للعدد1　　1 ن

حلول:

1) لدينا

$n^2-2n+2=n^2-2n+1+1$
$=(n-1)^2+1$ إذن فهو عدد صحيح طبيعي لأن مربع عدد صحيح طبيعي موجب

(2

$(a+b)^2-2ab=a^2+2ab+b^2-2ab$
$=a^2+b^2$

3) لدينا:

$$n^4+4=(n^2)^2+2^2$$

إذن $=(n^2+2)^2-2\times n^2\times 2$ وذلك حسب نتيجة السؤال السابق

ومنه النتيجة: $n^4+4=(n^2+2)^2-(2n)^2$

4) حسب نتيجة السؤال السابق لدينا إذن:

$$n^4+4=(n^2+2)^2-(2n)^2$$
$$=(n^2+2-2n)(n^2+2+2n)$$
$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2) \quad (5$$
$$=((n-1)^2+1))((n+1)^2+1)$$

وحيث إن: $n\neq 1$ فإن كلا من $(n+1)^2+1)$ و $(n-1)^2+1)$ عددان صحيحان طبيعيان أكبر من أو يساوي 2
وبالتالي فإن n^4+4 له أكثر من قاسمين يخالفان 1 فهو غير أولي.

التمرين الخامس: (2 نقط)

نضع: $A=7^{n+1}+5\times 7^n$

1) بين أن العدد: A يقبل القسمة على 12 — 1 ن
2) استنتج تفكيكا للعدد A إلى جداء عوامل أولية — 1 ن

حلول:

1) لدينا:

$$A=7^{n+1}+5\times 7^n$$
$$=7\times 7^n+5\times 7^n$$
$$=7^n(7+5)$$
$$=12\times 7^n$$

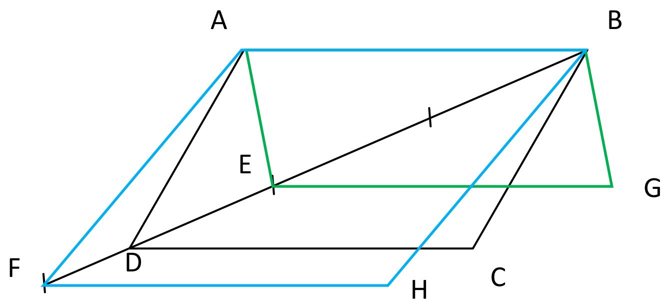
2) ومنه فإن: $A=12\times 7^n$
$=2^2\times 3\times 7^n$

التمرين السادس: (5 نقطة)

$ABCD$ متوازي الأضلاع.

1) أنشئ النقطتين E و F بحيث: $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DF}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{DB}$ — 1 ن
2) اكتب $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\overrightarrow{DF}$ — 1 ن
3) أنشئ H و G ليكون $BAEG$ و $BAFH$ متوازيي الأضلاع — 1 ن
4) بين أن: $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{DF}$ و $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DE}$ — 1 ن
5) استنتج أن النقط C و H و G مستقيمية. — 1 ن

حلول:



(1 إنشاء النقطتين E و F

(2 كتابة $\overrightarrow{DE}$ بدلالة $\overrightarrow{DF}$:

لدينا: $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DF}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{DB}$

إذن $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DB}$ و $\overrightarrow{DB}=-4\overrightarrow{DF}$

إذن $\overrightarrow{DE}=\frac{1}{3}-4\overrightarrow{DF}$

(3 إنشاء H و G: انظر الشكل

(4 لدينا $ABCD$ و $BAFH$ متوازيا الأضلاع إذن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FH}$

ومنه: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{FH}$ أي: $DCHF$ متوازيا الأضلاع وبالتالي: $\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{DF}$

كذلك: $ABCD$ و $ABGE$ متوازيا الأضلاع إذن: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EG}$

ومنه: $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{EG}$ أي: $DEGC$ متوازيا الأضلاع وبالتالي: $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{DE}$

التمرين السابع: (3 نقطة)

EFG مثلث. A و B نقطتان بحيث: $\overrightarrow{EA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{EG}$ و $\overrightarrow{FB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{FA}$

(1 اكتب: $\overrightarrow{EA}$ بدلالة $\overrightarrow{GA}$ و $\overrightarrow{AF}$ بدلالة $\overrightarrow{AB}$ 1 ن

(2 استنتج أن $(BG)//(EF)$ 1 ن

(3 M نقطة بحيث: $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{AG}$. بين أن $\overrightarrow{AE}$ و $\overrightarrow{FM}$ مستقيميتان 1 ن

حلول:

(1 لدينا: $\overrightarrow{EA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{EG}$ إذن وحسب علاقة شال فإن : $\overrightarrow{EA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{EA}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$

ومنه: $\overrightarrow{EA}-\frac{4}{3}\overrightarrow{EA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$ أي : $\frac{-1}{3}\overrightarrow{EA}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$ وبالتالي: $\overrightarrow{EA}=4\overrightarrow{GA}$

كذلك لدينا: $\overrightarrow{FB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{FA}$ إذن وحسب علاقة شال فإن: $\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{FA}$ أي $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{FA}$

وبالتالي: $\overrightarrow{AB}=\frac{-1}{4}\overrightarrow{FA}$ أي: $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AB}$

(2 حسب نتيجة السؤال السابق لدينا: $\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{EA}=4\overrightarrow{GA}$ ومنه فإن:

$$\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AF}=4\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{AB}$$

أي: $\overrightarrow{EF}=4(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB})$ (علاقة شال)

وبالتالي: $\overrightarrow{EF}=4\overrightarrow{GB}$ ومنه النتيجة

(3 لدينا: $\overrightarrow{EM}=\overrightarrow{EF}+2\overrightarrow{AG}$ إذن $\overrightarrow{EM}-\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{AG}$ أي $\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EM}=2\overrightarrow{AG}$

ومنه فإن $\overrightarrow{FM}=2\overrightarrow{AG}$ (علاقة شال)

وحيث أن: $\overrightarrow{EA}=4\overrightarrow{GA}$ فإن $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ ومنه نستنتج: $\overrightarrow{FM}=2\frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$ أي $\overrightarrow{FM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$