

Suites numériques

التمرين الأول

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{U_n + 1} \text{ و } U_0 = 3$$

(1) بين أن $U_n > 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)(2) أدرس رقابة المتتالية $(U_n)_n$ ب- استنتج أن المتتالية $(U_n)_n$ متقاربة(3) نضع $V_n = \frac{1}{U_n - 2}$ لكل عدد طبيعي n أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية حسابية أساسها $r = \frac{1}{3}$ ب- حدد كل من V_n ثم U_n بدلالة n و أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ ج- أحسب بدلالة n الجمع :

$$S = V_0 + V_1 + \dots + V_{n-1}$$

التمرين الثاني

نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$U_{n+1} = \frac{2U_n}{2U_n + 1} \text{ و } U_0 = \frac{1}{5}$$

(1) (i) تحقق أن $U_{n+1} = 1 - \frac{1}{2U_n + 1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)(ب) بين أن $0 < U_n < \frac{1}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)(2) تحقق أن $U_{n+1} - U_n = \frac{U_n(1 - 2U_n)}{2U_n + 1}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)و بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية ثم استنتج أنها متقاربة(3) نضع $V_n = \frac{3^n U_n}{2U_n - 1}$ لكل عدد طبيعي n أ- بين أن المتتالية $(V_n)_n$ هندسية أساسها $q = 6$ و أحسب V_n بدلالة n ب- استنتج أن $U_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

التمرين الثالث :

نعتبر المتتاليتين $(W_n)_n$ و $(V_n)_n$ المرفتين بما يلي :

$$W_n = 12 - V_n^2 \text{ و } \begin{cases} V_0 = 0 \\ U_{n+1} = \sqrt{\frac{1}{2}V_n^2 + 6} \end{cases} ; \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

(1) بين أن $0 \leq V_n \leq 2\sqrt{3}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)(2) بين أن $(W_n)_n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ (3) نضع $S_n = W_0 + W_1 + \dots + W_n$

$$\text{و } T_n = V_n^2 + V_{n-1}^2 + \dots + V_1^2$$

أ- أحسب S_n بدلالة n ب- بين أن $T_n = 12 \left(n - 1 + \frac{1}{2^n} \right)$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$

التمرين الرابع

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة بما يلي :

$$u_0 = 3 \text{ و } u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n} \text{ لكل عدد } n \text{ من } \mathbb{N}^*$$

(1) بين بالترجع أن $u_n > 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)(2) بين أن المتتالية $(u_n)_n$ تناقصية و استنتج أنها متقاربة(3) نضع $v_n = \frac{u_n + 3}{u_n - 2}$ لكل عدد طبيعي n أ- بين أن $(v_n)_n$ متتالية حسابية أساسها

$$r = \frac{5}{3} \text{ و حدد } v_n \text{ بدلالة } n$$

ب- بين أن $u_n = \frac{2n + 9}{n + 3}$ ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ج- تحقق أن $v_n = 1 + \frac{5}{u_n - 2}$ ثم أحسب بدلالة n الجمع

$$S_n = \frac{1}{u_0 - 2} + \frac{1}{u_1 - 2} + \dots + \frac{1}{u_n - 2}$$

التمرين الخامس

لتكن $(U_n)_n$ متتالية عددية بحيث :

$$U_{n+1} = \frac{7U_n + 3}{2U_n + 6} \text{ و } U_0 = \frac{5}{2}$$

(1) بين أن $U_n \geq \frac{3}{2}$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)(2) أ- بين أن $U_{n+1} - \frac{3}{2} \leq \frac{4}{9} \left(U_n - \frac{3}{2} \right)$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)ب- استنتج أن $U_n - \frac{3}{2} \leq \left(\frac{4}{9} \right)^n$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)ج- أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ (3) نضع $V_n = \frac{2U_n - 3}{U_n + 1}$ لكل عدد طبيعي n أ- بين أن $(V_n)_n$ متتالية هندسية أكتب V_n بدلالة n ب- ثم U_n بدلالة n وأحسب مرة ثانية النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$