

مستوى : السنة الثانية من سلك البكالوريا  
شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

### مذكرة رقم 12 في درس الجداء السلمي

#### القدرات المنتظرة

- التعبير و البرهنة على تعامد متجهتين
- التعبير متجهيا و تحليليا عن التعامد و خاصياته
- تحديد مستوى محدد بنقطة و متجهة منظمية عليه
- تحديد المستقيم المار من نقطة و العمودي على مستوى
- تحديد معادلة ديكارتية لفلكة محددة بمركزها و شعاعها
- تحديد تمثيل باراميتري لفلكة

- التعرف على مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق العلاقة :  $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

#### محتوى الدرس

- الجداء السلمي في الفضاء و خاصياته:
- الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد ممنظم
- المستوى المحدد بنقطة و متجهة منظمية عليه
- مسافة نقطة عن مستوى
- دراسة تحليلية للفلكة:
- دراسة مجموعة النقط بحيث:  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$
- تقاطع فلكة و مستقيم:
- تقاطع فلكة و مستوى:
- معادلة ديكارتية لمستوى مماس لفلكة في نقطة معلومة:

▪ منظم المتجهة  $\vec{u}$  هو العدد الحقيقي الموجب:  $\|\vec{u}\| = \sqrt{u^2}$

**خاصية:** لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  ثلاث متجهات من الفضاء و  $k$  عددا حقيقيا , لدينا:

$$\left. \begin{aligned} \leftarrow \text{التماثلية: } \vec{u} \cdot \vec{v} &= \vec{v} \cdot \vec{u} \\ \leftarrow \text{الخطائية: } \left. \begin{aligned} (k\vec{u}) \cdot \vec{v} &= k(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\}$$

#### 2. تعامد متجهتين:

**تعريف:** لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء. نقول إن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدان إذا وفقط إذا كان  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$  و نكتب:  $\vec{u} \perp \vec{v}$

#### مثال:

مكعب  $ABCDEFGH$

لدينا:  $\overrightarrow{AE}$  و  $\overrightarrow{AC}$  متعامدان أي  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = 0$  (لأن  $(AE)$  عمودي على المستوى  $(ABC)$ )

و بما أن  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$  فان  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BF} = 0$  أي  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BF}$

#### II. الصيغة التحليلية للجداء السلمي في معلم متعامد

##### ممنظم

#### (1) المعلم و الأساس المتعامدان الممنظمان:

#### I. الجداء السلمي في الفضاء و خاصياته:

##### 1. تعريف:

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء,  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط من الفضاء بحيث:  $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$  يوجد على الأقل مستوى  $(P)$  يمر من النقط  $A$  و  $B$  و  $C$ .

الجداء السلمي للمتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  في الفضاء هو الجداء السلمي  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  في المستوى  $(P)$ , و نرسم له بالرمز  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

**ملحوظة:** جميع خاصيات الجداء السلمي في المستوى تمتد إلى الفضاء.

**نتائج:** لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين من الفضاء, و  $A$  و  $B$  و  $C$  ثلاث نقط من

الفضاء بحيث:  $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$

▪ إذا كانت  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتين غير منعدمتين فان:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos BAC$$

▪ إذا كانت  $\vec{u}$  غير منعدمة فان.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$  حيث  $H$

المسقط العمودي للنقطة  $C$  على المستقيم  $(AB)$

##### ملحوظة:

▪ الجداء السلمي  $\vec{u} \cdot \vec{u}$  يرمز له بالرمز  $u^2$ , و يسمى المربع السلمي للمتجهة  $\vec{u}$

**تعريف:** ليكن  $(\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$  أساسا في الفضاء و  $O$  من الفضاء

نقول إن  $(\bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$  أساس متعامد ممنظم إذا كان:

$$\|\bar{i}\| = \|\bar{j}\| = \|\bar{k}\| = 1 \quad \text{و} \quad \bar{i}\bar{j} = \bar{i}\bar{k} = \bar{j}\bar{k} = 0$$

نقول إن  $(\bar{o}; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$  معلم متعامد ممنظم إذا كان أساسا

متعامدا ممنظما

فيما تبقى من فقرات الدرس, ننسب الفضاء إلى معلم متعامد ممنظم

### (2) خاصية:

إذا كانت  $\vec{u} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$  و  $\vec{v} = x'\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k}$  متجهتين من

الفضاء فان:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

**مثال:**  $\vec{u}(1; 5; -1)$  و  $\vec{v}(-5; 1; 0)$

هل المتجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متعامدتين؟

**الجواب:** نحسب الجداء السلمي:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-5) \times 1 + 1 \times 5 + 0 \times (-1) = (-5) + 5 = 0$$

ومنه:  $\vec{u} \perp \vec{v}$

### (3) منظم متجهة

**خاصية:** إذا كانت  $\vec{u} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$  فان منظم المتجهة  $\vec{u}$  هو:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

**مثال:**  $\vec{u} = \frac{1}{2}\bar{i} - \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{k}$  أحسب  $\|\vec{u}\|$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = 1$$

### (4) المسافة بين نقطتين:

**خاصية:** لتكن  $A(x_A; y_A; z_A)$  و  $B(x_B; y_B; z_B)$  نقطتين من

الفضاء

المسافة بين النقطتين  $A$  و  $B$  هي:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

**تمرين 1:** معلم متعامد ممنظم مباشر للفضاء

$(\bar{o}; \bar{i}; \bar{j}; \bar{k})$   $\vec{u}(3; -2; 1)$  ,  $\vec{v}(2; 1; 0)$  احسب  $\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}})$

$$\cos(\widehat{\vec{u}; \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|} = \frac{4}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{70}}$$

### (5) تحديد تحليلي لمجموعة النقط $M$ من الفضاء بحيث:

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$$

**خاصية:** لتكن  $A$  نقطة من الفضاء و  $\vec{u}(a; b; c)$  متجهة غير منعدمة

و  $k$  عددا حقيقيا

مجموعة النقط  $M$  من الفضاء بحيث:  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = k$  هي مستوى

معادلته تكتب على شكل  $ax + by + cz + d = 0$  , حيث  $d$  عدد

حقيقي

**مثال:** نعتبر النقطة  $A(1; -1; 2)$  و المتجهة  $\vec{u}(2; 1; -1)$

حدد  $(P)$  مجموعة النقط  $M$  من الفضاء بحيث:  $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -1$

**الجواب:** لتكن  $M(x; y; z)$  نقطة من الفضاء

لدينا:  $M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \overrightarrow{AM} = -1$

$$\Leftrightarrow 2(x-1) + (y+1) - (z-2) = -1$$

.  $2x + y - z + 2 = 0 \Leftrightarrow$  هذه المعادلة تكتب على الشكل:

$$ax + by + cz + d = 0$$

إذن المجموعة  $(P)$  هي المستوى الذي معادلته:

$$2x + y - z + 2 = 0$$

### III. المستوى المحدد بنقطة و متجهة منظميه عليه:

#### (1) متجهة منظميه على مستوى:

**تعريف:** ليكن  $(P)$  مستوى في الفضاء.

نسمي متجهة منظميه على المستوى  $(P)$  كل متجهة  $\vec{n}$  غير منعدمة

يكون اتجاهها عموديا على المستوى  $(P)$ .

**نتيجة:** المتجهة  $\vec{n}$  منظميه على المستوى  $(P)$  إذا وفقط إذا كانت  $\vec{n}$

متعامدة مع متجهتين للمستوى  $(P)$ .

**(2) خاصية:** لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  و أعدادا حقيقية بحيث

$$(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$$

مجموعة النقط  $d M(x; y; z)$  من الفضاء التي تحقق:

$$ax + by + cz + d = 0$$

هي مستوى و المتجهة  $\vec{n}(a; b; c)$  متجهة منظميه عليه.

أمثلة: حدد متجهة منظمية على المستوى  $(P)$  في الحالات التالية:

$$(1) 3x - z + 1 = 0 \quad (P) \quad (2) 2x - 3y + z + 10 = 0 \quad (P)$$

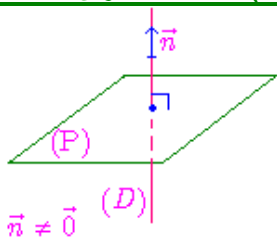
$$(3) z = 2 \quad (P) \quad (4) y + z + 1 = 0 \quad (P)$$

$$(5) x - 2y + 7z - 3 = 0 \quad (P) \quad (6) 2y - z + 11 = 0 \quad (P)$$

**أجوبة:** (1)  $\vec{n}(2; -3; 1)$  (2)  $\vec{n}(3; 0; -1)$  (3)  $\vec{n}(0; 1; 1)$

$$(4) \vec{n}(0; 0; 1)$$
 (5)  $\vec{n}(1; -2; 7)$  (6)  $\vec{n}(0; 2; -1)$

#### (3) معادلة مستوى المحدد بنقطة و متجهة منظميه عليه:



**خاصية:** لتكن  $\vec{n}(a; b; c)$  متجهة غير منعدمة و  $A$  نقطة من

الفضاء.

المستوى  $(P)$  المار من النقطة  $A$  و متجهة منظميه عليه, هو

مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق:  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

و معادلة ديكراتية له تكتب على شكل:  $ax + by + cz + d = 0$  ,

حيث  $d$  عدد حقيقي.

**مثال:** نعتبر في الفضاء المتجهة  $\vec{n}(1; 2; 1)$  و النقطتين  $A(-1; 0; 2)$

و  $B(3; 1; 0)$ .

**تمرين 2:** حدد معادلة ديكراتية للمستوى (P) المحدد ب

متجهة منظمية عليه  $\vec{n}(2; 1; -2)$  و  $A(-5; 2; -1)$

**الجواب:** نعتبر:  $M(x; y; z) \in (P)$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow 2(x+5) + (y-2) - 2(z+1) = 0$$

$$M(x; y; z) \in (P) \Leftrightarrow 2x + y - 2z + 6 = 0$$

ومنه:  $(P): 2x + y - 2z + 6 = 0$

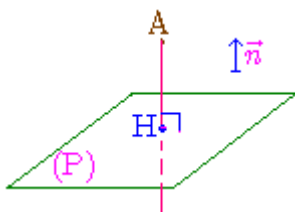
#### IV. مسافة نقطة عن مستوى:

**تعريف:** ليكن (P) مستوى و A نقطة من الفضاء و H المسقط

العمودي للنقطة A على المستوى (P).

المسافة AH تسمى مسافة النقطة A عن المستوى (P), و يرمز لها

بالرمز  $d(A; (P))$ .



**خاصية:** ليكن (P) مستوى معادلته  $ax + by + cz + d = 0$  و

A نقطة من الفضاء  $A(x_A; y_A; z_A)$ .

مسافة النقطة A عن المستوى (P) هي:

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

**مثال:** نعتبر في الفضاء النقطة  $A(5; 1; 0)$  و المستوى (P) الذي

$$x + 2y + 2z - 6 = 0$$

أحسب:  $d(A; (P))$

$$d(A; (P)) = \frac{|5 + 2 \times 1 + 2 \times 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1|}{3} = \frac{1}{3}$$

**تمرين 3:**  $(P): -3x + 2y + z + 2 = 0$

ليكن:  $(D) \perp (P)$  و  $B(-2; 2; 3) \in (D)$

**1) احسب:  $d(B; (P))$  حدد تمثيلا بارامتريا ل (D)**

$$d(B; (P)) = \frac{|-3 \times -2 + 2 \times 2 + 3 + 2|}{\sqrt{9 + 4 + 1}} = \frac{15}{\sqrt{14}}$$

**2) لدينا:  $(P): -3x + 2y + z + 2 = 0$**

إذن:  $\vec{n}(-3; 2; 1)$  متجهة منظمية على (P)

و بما أن:  $(D) \perp (P)$  فإن:

$\vec{n}(-3; 2; 1)$  متجهة موجهة ل (D)

1) حدد معادلة ديكراتية للمستوى (P) المار من النقطة A و  $\vec{n}$  متجهة منظمية عليه.

2) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المار من النقطة B و العمودي على المستوى (P).

3) حدد متلوث إحداثيات النقطة B' المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P).

**أجوبة:** 1) تحديد معادلة ديكراتية للمستوى (P):

**طريقة 1:**  $M(x; y; z) \in (P)$  يعني  $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

يعني  $\overrightarrow{AM}(x+1; y; z-2)$

$$(x+1) \times 1 + y \times 2 + 1 \times (z-2) = 0$$

يعني  $x+1+2y+z-2=0$  يعني  $x+2y+z-1=0$  (P)

**طريقة 2:** نعلم أن معادلة مستوى نكتب على الشكل:

$$ax + by + cz + d = 0$$

و نعلم أن  $\vec{n}(1; 2; 1)$  متجهة منظمية عليه إذن:

$$a=1 \text{ و } b=1 \text{ و } c=1$$

ومنه:  $(P) 1x + 2y + 1z + d = 0$

و نعلم أن:  $A(-1; 0; 2) \in (P)$  إذن احداثيات A تحقق المعادلة:

$$d = -1 \text{ يعني } (-1) + 2 \times 0 + 1 \times 2 + d = 0$$

وبالتالي:  $(P) x + 2y + z - 1 = 0$

2) تحديد تمثيل بارامتريا للمستقيم (D):

(D) يمر من النقطة B و عمودي على المستوى (P).

إذن:  $\vec{n}(1; 2; 1)$  متجهة موجهة ل (D) و  $B(3; 1; 0) \in (D)$

$$\text{إذن: } \begin{cases} x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases} \text{ حيث } k \in \mathbb{R} \text{ وهو تمثيل بارامتريا للمستقيم (D)}$$

3) B' هي المسقط العمودي للنقطة B على المستوى (P).

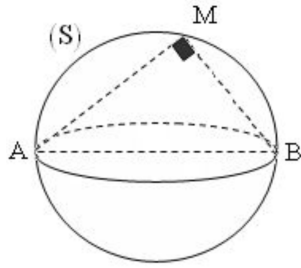
إذن:  $B' \in (D)$  و  $B' \in (P)$

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ x = 1k + 3 \\ y = 2k + 1 \\ z = 1k + 0 \end{cases} \text{ ومنه نحل النظام التالية:}$$

يعني  $6k + 4 = 0$  يعني  $k + 3 + 2(2k + 1) + k - 1 = 0$

$$\begin{cases} x = -\frac{2}{3} + 3 = \frac{7}{3} \\ y = -\frac{4}{3} + 1 = -\frac{1}{3} \\ z = -\frac{2}{3} + 0 \end{cases} \text{ يعن ي } k = -\frac{2}{3} \text{ ومنه:}$$

ومنه:  $B'(\frac{7}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{2}{3})$



**مثال:** حدد معادلة ديكارتية للكرة (S) التي أحد أقطارها [AB]

$$A(1;0;-1) \text{ و } B(1;2;-1)$$

**الجواب: طريقة 1**

مركزها  $\Omega$  هو منتصف القطعة [AB]

$$\text{اذن: } \Omega\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right) \text{ اذن: } \Omega(1;1;-1)$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{(0)^2 + (2)^2 + (0)^2}}{2} = 1 \text{ ولدنيا أيضا:}$$

ومنه: معادلة ديكارتية للكرة هي:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1^2$$

$$\text{يعني: } (S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

**طريقة 2: نستعمل الخاصية:**  $A(1;0;-1)$  و

$$B(1;2;-1)$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \text{ يعني } M \in (S)$$

$$\text{لدنيا } \overline{MA}(1-x; 0-y; -1-z) \text{ و}$$

$$\overline{MB}(1-x; 2-y; -1-z)$$

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0 \text{ يعني}$$

$$(1-x) \times (1-x) + (-y)(2-y) + (-1-z)(-1-z) = 0$$

$$\text{يعني: } (1-x)^2 + (-y)(2-y) + (-1-z)^2 = 0$$

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 2z + 2 = 0$$

**VI. دراسة مجموعة النقط بحيث:**

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

**خاصية:** لتكن  $a$  و  $b$  و  $c$  و  $d$  أعدادا حقيقية بحيث

$(a; b; c) \neq (0; 0; 0)$  و  $S$  مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  من الفضاء

$$\text{التي تحقق المعادلة: } x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

تكون (S) كرة إذا وفقط إذا كان:  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d > 0$

مركز هذه الكرة هو النقطة  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$  و شعاعها هو:

$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$$

إذا كان  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d < 0$  فإن (S) هي المجموعة

$$\text{الفارغة. } (x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

$$\text{حيث } A(x_A; y_A; z_A) \text{ و } B(x_B; y_B; z_B)$$

و لدينا:  $B(-2; 2; 3) \in (D)$

$$(D) : \begin{cases} x = -3t - 2 \\ y = 2t + 2 \\ z = t + 3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{اذن:}$$

**V. دراسة تحليلية للكرة:**

**(1) تعريف:**

لتكن  $\Omega$  نقطة من الفضاء و  $R$  عددا حقيقيا موجبا قطعاً.

الكرة (S) التي مركزها  $\Omega$  و شعاعها  $R$  هي مجموعة النقط  $M$  من

الفضاء التي تحقق:  $\Omega M = R$ .

نرمز لهذه الكرة بالرمز  $S(\Omega; R)$

**(2) معادلة ديكارتية للكرة محددة بمركزها و شعاعها:**

**خاصية:** معادلة ديكارتية للكرة (S) التي مركزها  $\Omega(a; b; c)$  و

شعاعها  $R (R > 0)$  هي:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$$

و نكتب أيضا:  $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$  حيث:

$$d = a^2 + b^2 + c^2 - R^2$$

**مثال:** حدد معادلة ديكارتية للكرة (S) في الحالات التالية:

(1) (S) مركزها  $\Omega(1; 2; -3)$  و شعاعها  $R = 4$ .

(2) (S) مركزها  $\Omega(0; -1; 1)$  و تمر من النقطة  $A(1; 2; -1)$

**أجوبة: (1)** (S) مركزها  $\Omega(1; 2; -3)$  و شعاعها  $R = 4$ .

$$\text{اذن: } (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 4^2$$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشرها فنجد:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 + 6z + 9 = 16$$

$$\text{يعني: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z - 2 = 0$$

وهي تكتب على الشكل التالي:  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

(2) (S) مركزها  $\Omega(0; -1; 1)$  و تمر من النقطة  $A(1; 2; -1)$

يعني:  $\Omega A = R$

نحسب المسافة  $\Omega A$ :

$$R = \Omega A = \sqrt{(1-0)^2 + (2+1)^2 + (-1-1)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$

ومنه: معادلة ديكارتية للكرة هي:

$$(x-0)^2 + (y+1)^2 + (z-1)^2 = (\sqrt{14})^2$$

$$\text{يعني: } (S) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z - 12 = 0$$

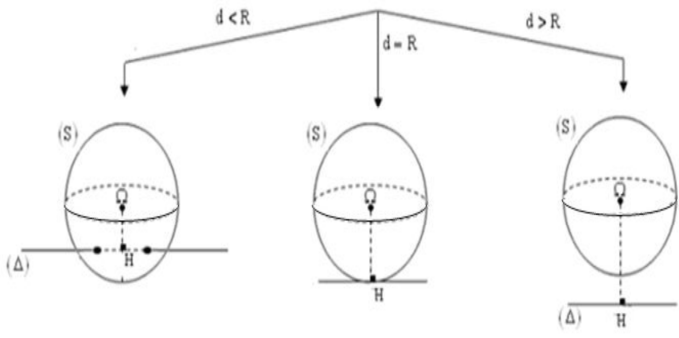
**خاصية:** لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من الفضاء.

مجموعة النقط  $M$  من الفضاء التي تحقق:  $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0$  هي الكرة

التي أحد أقطارها [AB]، و معادلة ديكارتية لها هي:

$$(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$$

$$\text{حيث } A(x_A; y_A; z_A) \text{ و } B(x_B; y_B; z_B)$$



ليكن  $(D)$  مستقيماً من الفضاء معرفاً بتمثيل بارامترى و  $(S)$  فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية، لندرس ثلاث أمثلة نحدد من خلالها الوضع النسبي للمستقيم  $(D)$  و الفلكة  $(S)$ .

**مثال 1:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0$$

و  $(D)$  المستقيم المار من  $A(0; 5; 1)$  و  $\vec{n}(2; 1; -2)$  متجهة موجهة له

(1) حدد تمثيل بارامترى للمستقيم  $(D)$

(2) أدرس الوضع النسبي للمستقيم  $(D)$  و الفلكة  $(S)$

**الجواب (1):** تمثيل بارامترى للمستقيم  $(D)$  هو :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = 5 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

(2) نحل النظام التالي :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y - 2z + 5 = 0 \\ x = 2t \\ y = 5 + t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

$$(2t)^2 + (5+t)^2 + (1-2t)^2 + 6 \times 2t - 4(5+t) - 2(1-2t) + 5 = 0$$

$$t^2 + 2t + 1 = 0 \text{ يعني } 9t^2 + 18t + 9 = 0$$

$$\text{لدينا: } \Delta = 0 \text{ إذن للمعادلة حل حقيقي مزدوج } t = -1 = \frac{-b}{2a}$$

نعوض  $t = -1$  في التمثيل البارامترى ل  $(D)$

$$\text{فنجد : } \begin{cases} x = -2 \\ y = 4; \\ z = 3 \end{cases} \text{ ومنه هناك نقطة وحيدة مشتركة بين } (D) \text{ و } (S)$$

هي:  $T(-2; 4; 3)$

في هذا المثال للفلكة  $(S)$  و المستقيم  $(D)$  نقطة وحيدة مشتركة هي

$T$

نقول إن المستقيم  $(D)$  مماس للفلكة  $(S)$  في النقطة  $T$ .

▪ إذا كان  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 0$  فإن  $(S)$  هي

$$(S) = \left\{ \Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \right) \right\}$$

**أمثلة:** حدد مجموعة النقط  $M(x; y; z)$  التي تحقق المعادلات التالية:

$$(E_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 6z + 6 = 0 \quad (1)$$

$$(E_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 6 = 0 \quad (2)$$

$$(E_3): x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z + \frac{9}{2} = 0 \quad (3)$$

**أجوبة (1):**  $(E_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 6z + 6 = 0$

على الشكل :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

إذن لدينا :  $a = -6$  و  $b = 4$  و  $c = -6$  و  $d = 6$

نحسب :  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 36 + 16 + 36 - 24 = 64 > 0$$

ومنه :  $(E_1)$  فلكة مركزها  $\Omega \left( \frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2} \right)$  أي  $\Omega(3; -2; 3)$

و شعاعها هو :  $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$  أي  $R = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$

$$(E_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y + 2z + 6 = 0 \quad (2)$$

على الشكل :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

إذن لدينا :  $a = -4$  و  $b = 2$  و  $c = 2$  و  $d = 6$

نحسب :  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 16 + 4 + 4 - 24 = 0$$

ومنه :  $(E_2)$  هي النقطة  $\Omega \left( -\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2} \right)$  أي  $(E_2) = \left\{ \Omega(2; -1; -1) \right\}$

$$(E_2) = \left\{ \Omega(2; -1; -1) \right\}$$

$$(E_3): x^2 + y^2 + z^2 - x + 3y + 2z + \frac{9}{2} = 0 \quad (3)$$

على الشكل :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

إذن لدينا :  $a = -1$  و  $b = 3$  و  $c = 2$  و  $d = \frac{9}{2}$

نحسب :  $a^2 + b^2 + c^2 - 4d$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 1 + 9 + 4 - 18 = -4 < 0$$

ومنه :  $(E_3)$  هي المجموعة الفارغة.

**VII. تقاطع فلكة و مستقيم:**

$(S)$  فلكة و  $(D)$  مستقيم

$(S)$  و  $(D)$  يكونان إما منفصلين أو متقاطعين في نقطة أو في نقطتين

**مثال 2:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها:

$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0$  و  $(D)$  المستقيم المعروف بما يلي:

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 2 - 2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = -1 + t \end{cases}$$

الفلكة  $(S)$

أدرس الوضع النسبي للمستقيم  $(D)$  و الفلكة  $(S)$

**الجواب:**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 1 = 0 \\ x = -1 + 2t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$$

نحل النظمة التالية :

$$\begin{aligned} (-1+2t)^2 + (2-2t)^2 + (-1+t)^2 - 4(-1+2t) - 2(2-2t) - 1 &= 0 \\ \Delta = 18t^2 - 4 \times 9 \times 5 = 324 - 180 = 144 = 12^2 & \text{ لدينا: } 9t^2 - 18t + 5 = 0 \\ \text{اذن المعادلة تقبل حلين حقيقيين مختلفين هما: } t_1 = \frac{1}{3} \text{ و } t_2 = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

نعوض  $t$  ب  $\frac{1}{3}$  و  $\frac{5}{3}$  في التمثيل البارامتري ل  $(D)$  فنجد نقطتين:

$$A\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right) \text{ و } B\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$$

هما  $A\left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{2}{3}\right)$  و  $B\left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)$  في هذا المثال للفلكة  $(S)$  و المستقيم  $(D)$  لهما

نقطتان مشتركتان هما  $A$  و  $B$  نقول:

إن المستقيم  $(D)$  قاطع للفلكة  $(S)$ .

**مثال 3:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها:

$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0$  و  $(D)$  المستقيم المعروف بما يلي:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$$

$(S)$

**الجواب:**

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 4 = 0 \\ x = 0 \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

نحل النظمة التالية :

$$0^2 + t^2 + t^2 - 2 \times 0 + 4t - 2t + 4 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4 \times 2 = -7 < 0 \text{ لدينا: } t^2 + t + 2 = 0 \text{ يعني } 2t^2 + 2t + 4 = 0$$

اذن المعادلة ليس لها حل في  $\mathbb{R}$  ومنه المستقيم  $(D)$  يوجد خارج الفلكة  $(S)$  يعني :

$$(S) \cap (D) = \emptyset$$

**تمرين 4:**  $A(1; 1; -2)$  و  $\vec{u}(-3; 2; 1)$

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

ادرس تقاطع المستقيم  $(D)$  و  $(S)$

**الجواب:**  $M(x; y; z) \in (D) \cap (S)$

نبحث عن : تمثيل بارامتري ل  $(D)$  :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases} \text{ يعني : } M(x; y; z) \in (S) \text{ و}$$

$$\text{اذن: } (1 - 3t)^2 + (1 + 2t)^2 + (-2 + t)^2 = 6$$

$$\text{يعني : } 14t^2 - 6t + 6 = 6 \text{ يعني } 14t^2 - 6t = 0$$

$$\text{يعني : } t(7t - 3) = 0 \text{ يعني : } t = 0 \text{ أو } t = \frac{3}{7}$$

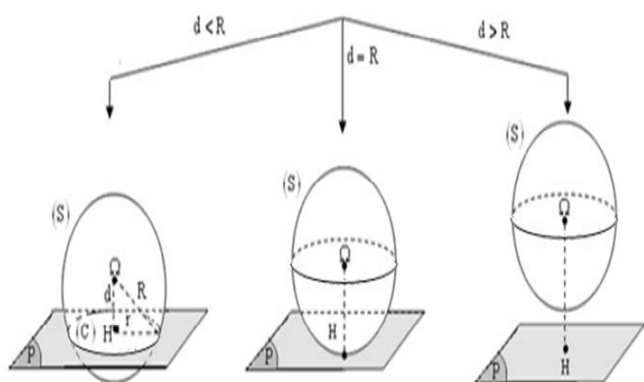
$$\text{ومنه : } M\left(\frac{-2}{7}; \frac{13}{7}; -\frac{13}{7}\right) ; M(1; 1; -2)$$

$$\text{اذن : } (D) \cap (S) = \left\{ A(1; 1; -2) ; B\left(\frac{-2}{7}; \frac{13}{7}; -\frac{13}{7}\right) \right\}$$

### VIII. تقاطع فلكة و مستوى:

لتكن  $H$  المسقط العمودي للمركز  $\Omega$  على المستوى  $(P)$

$$\text{نضع: } d = \Omega H = d(\Omega; (P))$$



المستوى  $(P)$  يقطع الفلكة  $(S)$  وفق دائرة  $(C)$  مركزها:  $H$  شعاعها:  $r = \sqrt{R^2 - d^2}$

المستوى  $(P)$  مماس للفلكة  $(S)$  في النقطة  $H$

المستوى  $(P)$  لا يقطع الفلكة  $(S)$

لتكن  $(S)$  فلكة معرفة بمعادلتها الديكارتية، و  $(P)$  مستوى من الفضاء معرفة بمعادلة ديكارتية، لندرس ثلاث أمثلة نستنتج من خلالها الوضع النسبي للمستوى  $(P)$  و الفلكة  $(S)$ .

**مثال 1:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي معادلتها:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$2x + y + 2z - 3 = 0$$

(1) حدد المركز  $\Omega$  للفلكة  $(S)$  وشعاعها  $R$

(2) أحسب  $d(\Omega; (P))$  وتأكد أن  $(P)$  يقطع الفلكة في نقطة

وحيدة  $T$

(3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم  $(\Delta)$  المار من  $\Omega$  والعمودي على

$(P)$

(4) استنتج احداثيات  $T$  نقطة تماس الفلكة  $(S)$  و المستوى  $(P)$

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y + 2z - 1 = 0 \quad \underline{\text{اجوبة: } \mathcal{L}}$$

$$\text{على الشكل: } x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$\text{اذن لدينا: } a = 2 \text{ و } b = -2 \text{ و } c = 2 \text{ و } d = -1$$

$$\text{نحسب: } a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 > 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 + 4 + 4 + 4 = 16 > 0$$

ومنه  $(S)$  فلكة مركزها  $\Omega\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$  أي  $\Omega(-1; 1; -1)$

$$\text{و شعاعها هو: } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ أي } R = \frac{\sqrt{16}}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\underline{\mathcal{L}} \quad 2x + y + 2z - 3 = 0 \text{ و } \Omega(-1; 1; -1)$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2 \times (-1) + 1 + 2 \times (-1) - 3|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \frac{|6|}{3} = \frac{6}{3} = 2 = R$$

ومنه  $(P)$  يقطع الفلكة في نقطة وحيدة  $T$

نقول  $(P)$  مماس للفلكة  $(S)$  في  $T$

(3)  $(\Delta)$  يمر من  $\Omega$  و عمودي على  $(P)$  ونعلم أن  $\vec{n}(2; 1; 2)$

متجهة منظمية على  $(P)$

$$(\Delta) \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1t + 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t - 1 \end{cases} \text{ اذن تمثيل بارامتري ل } (\Delta) \text{ هو:}$$

$$(4) T(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$$

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1t + 1; (t \in \mathbb{R}) \text{ و } (P) \quad 2x + y + 2z - 3 = 0 \\ z = 2t - 1 \end{cases}$$

$$\text{اذن: } 2(2t - 1) + (t + 1) + 2(2t - 1) - 3 = 0$$

$$\text{يعني } 9t - 6 = 0 \text{ يعني } t = \frac{2}{3} \text{ وبالتعويض في التمثيل البارامتري}$$

نجد

$$\text{ومنه: } T\left(\frac{1}{3}; \frac{5}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ نقطة التماس} \begin{cases} x = 2 \times \frac{2}{3} - 1 \\ y = 1 \times \frac{2}{3} + 1; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2 \times \frac{2}{3} - 1 \end{cases}$$

**مثال 2:** لتكن  $(S)$  الفلكة التي مركزها  $\Omega(2; 0; 1)$  شعاعها

$$R = 3 \text{ والمستوى } (P) \text{ المعرف}$$

$$\text{بالمعادلة: } x - 2y + z + 3 = 0$$

(1) حدد معادلة ديكرتية للفلكة  $(S)$

(2) أحسب  $d(\Omega; (P))$  وتأكد أن  $(P)$  يقطع الفلكة وفق دائرة

$(C)$  يتم تحديد شعاعها  $r$

(3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم  $(\Delta)$  المار من  $\Omega$  والعمودي على

$(P)$

(4) استنتج احداثيات  $H$  مركز الدائرة  $(C)$

$$\underline{\text{اجوبة: } \mathcal{L}} \text{ اذن: } (x-2)^2 + (y-0)^2 + (z-1)^2 = 3^2$$

يمكن الاكتفاء بهذه الكتابة أو نشرها فنجد:

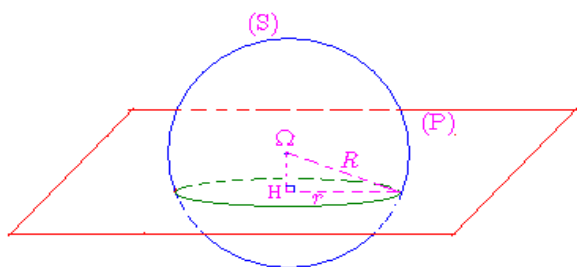
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + z^2 - 2z + 1 = 9$$

$$\text{يعني: } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2z - 4 = 0$$

$$\underline{\mathcal{L}} \quad \Omega(2; 0; 1) \text{ و } x - 2y + z + 3 = 0$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{|6|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < R = 3$$

ومنه  $(P)$  يقطع الفلكة وفق دائرة  $(C)$



نلاحظ أننا نحصل على مثلث قائم الزاوية في  $H$

$$\text{ومنه حسب فيثاغورس فان: } r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

$$r = \sqrt{3^2 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{9 - 6} = \sqrt{3}$$

$$(3) \quad \Omega(2; 0; 1) \text{ و } (P) \quad x - 2y + z + 3 = 0$$

$(\Delta)$  يمر من  $\Omega$  و عمودي على  $(P)$  ونعلم أن  $\vec{n}(1; -2; 1)$

متجهة منظمية على  $(P)$

$$(\Delta) \begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = -2t; (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1t + 1 \end{cases} \text{ اذن تمثيل بارامتري ل } (\Delta) \text{ هو:}$$

$$(4) H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P)$$

$$(\Delta) \begin{cases} x = 1t + 2 \\ y = -2t; (t \in \mathbb{R}) \text{ و } (P) \quad x - 2y + z + 3 = 0 \\ z = 1t + 1 \end{cases}$$

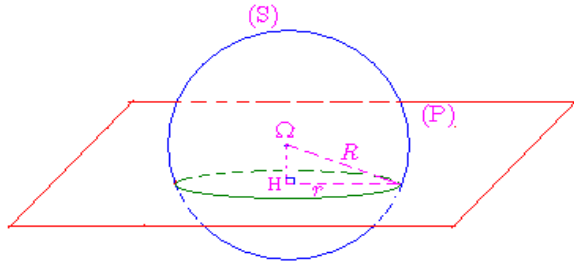
$$\text{اذن: } (t + 2) - 2(-2t) + (t + 1) + 3 = 0$$

$$\text{يعني } 6t + 6 = 0 \text{ يعني } t = -1 \text{ وبالتعويض في التمثيل البارامتري}$$

نجد

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|2+6-1+3|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|10|}{3} = \frac{10}{3} < R=4$$

ومنه : (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C)



$$r = \sqrt{4^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{100}{9}} = \sqrt{\frac{44}{9}} = \frac{\sqrt{44}}{3} = \frac{2\sqrt{11}}{3}$$

$$\Omega(1; -3; -1) \text{ و } (P) : 2x - 2y + z + 3 = 0 \quad (3)$$

(Δ) يمر من Ω وعمودي على (P) ونعلم أن :  $\vec{n}(2; -2; 1)$

متجهة منظمية على (P)

$$(\Delta) \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t-3; (t \in \mathbb{R}) \\ z=1t-1 \end{cases}$$

$$H(x; y; z) \in (\Delta) \cap (P) \quad (4)$$

$$(\Delta) \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-2t-3 \text{ و } (P) : 2x - 2y + z + 3 = 0 \\ z=1t-1 \end{cases}$$

$$\text{اذن : } 2(2t+1) - 2(-2t-3) + (t-1) + 3 = 0$$

$$\text{يعني } 9t + 10 = 0 \text{ يعني } t = -\frac{10}{9} \text{ وبالتعويض في التمثيل}$$

البارامترى نجد

$$(C) \begin{cases} x = -\frac{11}{9} \\ y = -\frac{7}{9} \\ z = -\frac{19}{9} \end{cases} \text{ ومنه : } H\left(-\frac{11}{9}; -\frac{7}{9}; -\frac{19}{9}\right) \text{ مركز الدائرة}$$

**خاصية:** يكون مستوى (P) مماسا للفلكة  $S(\Omega; R)$  إذا وفقط إذا كان  $d(\Omega; (P)) = R$ .

### IX. معادلة ديكارتية لمستوى مماس لفلكة في نقطة معلومة:

**خاصية:** لتكن (S) فلكة مركزها Ω و A نقطة من الفلكة (S) يوجد مستوى وحيد (P) مماس للفلكة (S) عند النقطة A,

و هو المستوى العمودي على المستقيم (AΩ) في النقطة A, أي

$$M \in (P) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0$$

$$(C) \text{ ومنه : } \begin{cases} x = -1+2 \\ y = -2(-1) \\ z = -1+1 \end{cases}$$

**مثال 3:** لتكن (S) الفلكة التي معادلتها هي:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0 \text{ , و المستوى } (P)$$

الذي معادلته الديكارتية هي:  $x + y - z + 2 = 0$

(1) حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

(2) أحسب :  $d(\Omega; (P))$  ماذا تستنتج ؟

$$\text{اجوبة : } x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 0$$

على الشكل :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا :  $a = -2$  و  $b = 0$  و  $c = 0$  و  $d = 0$

$$\text{نحسب : } a^2 + b^2 + c^2 - 4d$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 4 > 0$$

ومنه : (S) فلكة مركزها  $\Omega\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$  أي  $\Omega(1; 0; 0)$

$$\text{و شعاعها هو : } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \text{ أي : } R = \frac{\sqrt{4}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\Omega(1; 0; 0) \text{ و } x + y - z + 2 = 0 \quad (2)$$

$$d(\Omega; (P)) = \frac{|1+2|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|3|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} > R=1$$

ومنه : (P) يوجد خارج الفلكة (S) أو لا يقطع الفلكة

**تمرين 5:** لتكن (S) الفلكة التي معادلتها الديكارتية هي :

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z = 5$$

والمستوى (P) المعروف ب  $(P) : 2x - 2y + z + 3 = 0$

(1) حدد المركز Ω للفلكة (S) وشعاعها R

(2) بين أن (P) يقطع الفلكة وفق دائرة (C) يتم تحديد شعاعها r

(3) حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (Δ) المار من Ω والعمودي على (P)

(4) استنتج احداثيات H مركز الدائرة (C)

$$\text{اجوبة : } (S) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y + 2z = 5$$

على الشكل :  $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

اذن لدينا :  $a = -2$  و  $b = 6$  و  $c = 2$  و  $d = -5$

$$\text{نحسب : } a^2 + b^2 + c^2 - 4d$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 4d = 64 > 0$$

ومنه : (S) فلكة مركزها  $\Omega\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$  أي  $\Omega(1; -3; -1)$

$$\text{و شعاعها هو : } R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2} \text{ أي : } R = \frac{\sqrt{64}}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$\Omega(1; -3; -1) \text{ و } (P) : 2x - 2y + z + 3 = 0 \quad (2)$$



**مثال:**

$$S(\Omega; R) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = 5$$

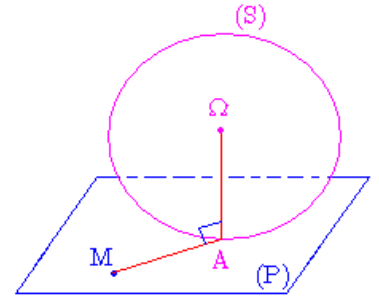
(1) بين أن  $A(2; -1; 0) \in (S)$

(2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى  $(P)$  المماس ل  $(S)$  في  $A$

**الجواب:**

(1) نعوض باحداثيات في معادلة الفلكة ونجد أنها تحقق المعادلة

$$(S) : 2^2 + (-1)^2 + 0^2 + 2 \times 2 + 4 \times (-1) - 6 \times 0 = 5$$



$$S(\Omega; R) : x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z = 5 \quad (2)$$

نحدد مركز الفلكة :  $a = 2$  و  $b = 4$  و  $c = -6$

ومنه :  $(S)$  فلكة مركزها  $\Omega\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$  أي  $\Omega(-1; -2; 3)$

لتكن  $M(x; y; z)$  و  $A(2; -1; 0)$

$\overline{AM} \cdot \overline{A\Omega} = 0$  يعني  $M(x; y; z) \in (P)$

$\overline{A\Omega}(-3; -1; 3)$  و  $\overline{AM}(x-2; y+1; z)$

$$-3(x-2) - (y+1) + 3z = 0 \quad \text{يعني}$$

$$(P) \quad -3x - y + 3z + 5 = 0$$

**تمرين 6:** نعتبر الفلكة  $(S)$  التي مركزها  $A(2; -1; 1)$  و شعاعها 6

(1) بين أن  $B(-2; 3; -1) \in (S)$

(2) حدد معادلة ديكارتية للمستوى  $(P)$  المماس ل  $(S)$  في  $B$