العادية 2008

I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=x-2\ln x$$

1) أ- أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0,+\infty[$

بـ بين أن g تناقيصة على $]0,2]$ و تزايدية على $[2,+\infty[$

2) استنتج أن $g(x)>0$ لكل x من $]0,+\infty[$

II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x)=x-(\ln x)^2$$

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة

2) أ- بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

بـ استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$

ج. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f عند $+\infty$

د- بين أن المنحنى C_f يوجد تحت المستقيم (Δ) $y=x$

3) أ- بين أن $f'(x)=\frac{g(x)}{x}$ و استنتج تغيرات الدالة f

بـ أنجز جدول تغيرات الدالة f

ج- أعط معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة ذات الأفصول 1

4) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0,+\infty[$ و أن $\frac{1}{e}<\alpha<\frac{1}{2}$ (نأخذ $(\ln 2)^2<\frac{1}{2}$)

5) أرسم المنحنى C_f و المستقيم (Δ) (نقبل أن C_f يقبل في النقطة $I(e,e-1)$ نقطة انعطاف و نأخذ $e\simeq 2,7$)

III) $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي :

$U_0=2$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

1) بين بالترجع أن $1\le U_n\le 2$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

3) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

العادية 2006

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$g(x)=\ln(x+1)-x$$

1) أ- أحسب $g'(x)$ ثم بين أن g تناقصية على $[0,+\infty[$

بـ استنتج أن $\forall x\in[0,+\infty[\ :\ g(x)\le 0$

2) بين أن $\forall x\in\,]0,+\infty[\ :\ 0<\ln(x+1)<x$

الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=x+\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1) حدد مجموعة التعريف و بين أن f دالة فردية

2) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x)$

بـ أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f عند $+\infty$

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

4) أ- أدرس إشارة $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

(لاحظ أن $\frac{x+1}{x-1}=1+\frac{2}{x-1}$)

بـ استنتج الوضع النسبي للمنحنى C_f و المستقيم (Δ) $y=x$

5) أرسم المنحنى C_f و (Δ) (نأخذ $f(\sqrt{3})=3$)

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n>1}$ المعرفة كما يلي : $U_n=f(n)-n$

1) أ- تحقق أن $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ U_n=\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)$

بـ بين أن $(U_n)_{n>1}$ تناقصية

2) أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ :\ 0<U_n\le\frac{2}{n-1}$

بـ أحسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n>1}$

مسألة

(I) 1) نضع $v(x)=\ln(x+1)-x$ لكل $x\in[0,+\infty[$

أ- أحسب $v'(x)$ و ضع جدول تغيرات v

بـ استنتج أن $(\forall x>0)\ :\ \ln(1+x)<x$

2) نضع $h(x)=-\frac{3}{2}x-\ln(1-x)$ لكل $x\in\,]-\infty,0]$

أ- بين أن $h'(x)=\frac{3x-1}{2(1-x)}$ و أنجز جدول تغيرات h

بـ بين أن $h(x)\ge 0$ لكل $x\in\,]-\infty,0]$

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty,1[$ بما يلي :

$$f(x)=-\frac{x}{2}-\ln(1-x)$$

1) أ- أحسب النهايتين $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

بـ أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

2) أ- بين أن $f'(x)=\frac{x+1}{2(1-x)}$

بـ ضع جدول تغيرات الدالة f

3) أ- بين أن (C_f) يوجد فوق (Δ) $y=x$ على $]-\infty,0[$

بـ أرسم المنحنى (C_f)

(III) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $U_0=-1$ و $U_{n+1}=f(U_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين بالترجع أن $-1\le U_n\le 0$ $(\forall n\in\mathbb{N})$

بـ بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

ج- بين أن $U_{n+1}\ge\frac{1}{2}U_n$ استنتج أن $U_n\ge-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

د- بين أن $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها